IBL 近似的数学原理

Dezeming Family

2021 年 6 月 16 日

DezemingFamily 系列书和小册子因为是电子书，所以可以很方便地进行修改和重新发布。如果您获得了 DezemingFamily 的系列书，可以从我们的网站 [https://dezeming.top/] 找到最新版。对书的内容建议和出现的错误欢迎在网站留言。

前言

前段时间做了一些环境光映射方面的技术，今天打算写一下基本的 IBL 近似方案。结合闫令琪的 course 思路来进行一下讲解。

目录

一　渲染方程的近似

首先我们回顾一下渲染方程：

$$L_o(p,\omega_o)=\int_S L_i(p,\omega_i)f_r(p,\omega_i,\omega_o)V(p,\omega_i)cos\theta_i d\omega_i \tag{一.1}$$

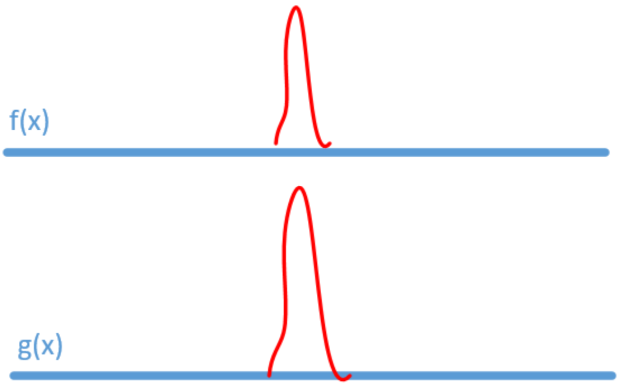
可以看到这个积分项其实是多个函数相乘再积分。我们设积分分为：

$$\int_S f(x)g(x)dx \quad (= \ \ or \ \ \neq) \ \ \frac{1}{\int_S dx}\int_S f(x)dx\int_S g(x)dx \tag{一.2}$$

$\frac{1}{\int_S dx}$ 是一个归一化系数，抵消因为积分区域过大或者过小从而拆分带来的积分值过高或者过低。如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是常数函数，上面就是等号，否则一般是不会相等的（顺便提一句，非常数下能保证相等的一般是单位正交基函数）。

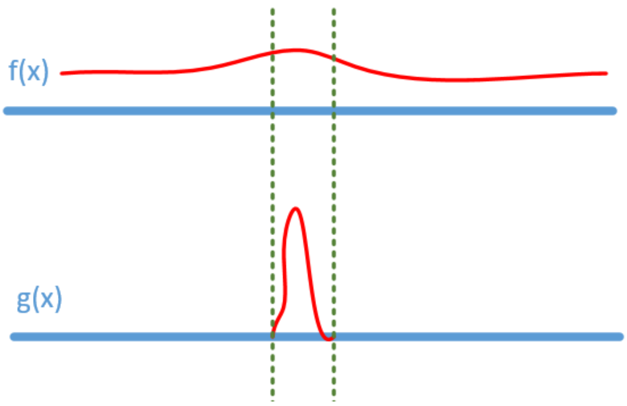
尽管一般情况下，尤其是在渲染场景中不会相等，那它们能不能是近似相等的呢？

我们考虑一种情况：

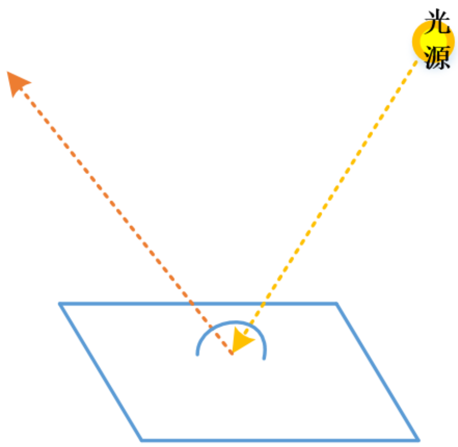


可以看到，它们重合区域基本一致，而且大体上函数值都是大于 0 的，这个时候我们可以认为它们两个近似是相等的。

对于下面这种情况：



显然在整个区间进行积分得到的结果相差是非常大的，而当我们只在虚线内的区间进行积分时，结果就可以近似相等。这种情况对应于渲染中的点光源和方向光，我们的知道光源的位置，就直接计算入射光光强，以及反射 BRDF 积分（这个时候积分不用显式计算，因为积分区间无限小，所以就是一个数值），然后相乘就可以了：



如上图，BRDF 积分区间虽然非常大，但我们知道除了光源方向其他地方函数值都为 0，因此只需要积分光源方向所在的立体角区域即可（对于点光源来说该区域理论上立体角大小为 0）：

$$L_o(p,\omega_o) \approx \frac{\int_S V(p,\omega_i)d\omega_i}{\int_S d\omega_i} \int_S L_i(p,\omega_i) f_r(p,\omega_i,\omega_o) cos\theta_i d\omega_i \tag{一.3}$$

第二种情况，当 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是低频函数时（比较平滑），对应于漫反射场景，我们就可以将上式积分两项也拆分出来，这个时候其实就是所谓的环境光遮蔽（计算物体被周边区域遮挡的程度，再计算环境光照的程度，然后相乘）。

而渲染方程的积分是多个函数的积分，我们还可以拆出其他项：

$$L_o(p,\omega_o) \approx \frac{\int_S L_i(p,\omega_i)d\omega_i}{\int_S d\omega_i} \int_S f_r(p,\omega_i,\omega_o)cos\theta_i V(p,\omega_i)d\omega_i \tag{一.4}$$

在不考虑 IBL 阴影的时候，我们可以把上式简化为：

$$L_o(p,\omega_o) \approx \frac{\int_S L_i(p,\omega_i)d\omega_i}{\int_S d\omega_i} \int_S f_r(p,\omega_i,\omega_o)cos\theta_i d\omega_i \tag{一.5}$$

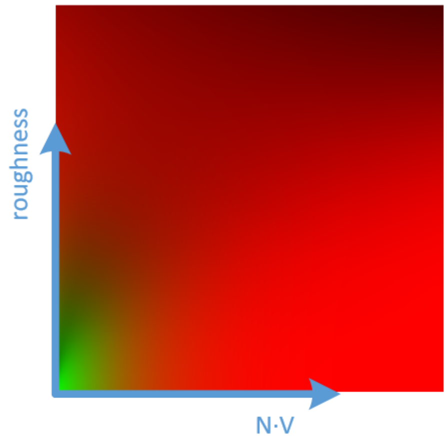
因此，我们就可以根据 BRDF 的积分范围来决定我们的积分区间，这种预计算其实就可以简化为不同模糊程度的图 MIPMap。

二 IBL 关于 BRDF 的积分

前面光照的计算有着落了，但是后面关于 BRDF 项目的积分还是比较困难的。其实对于微表面材质的 BRDF 而言，两个主要参数是菲涅尔项和微表面法线分布和微遮挡关系。

菲涅尔项是经过菲涅尔系数（对于特定材质来说是常数）和表面法向量与视线方向夹角 θ（其实在图形学中，入射光和出射光与表面向量夹角非常近似，以及与半角向量和法向量的夹角也非常近似，因此很多时候都是混用的）这两个参数计算得到的。

经过近似以后就可以进行拆分，得到两个积分项，之后这两个积分项一共有两个可变量，一个是粗糙度，一个是表面法向量与视线方向的夹角 θ，而颜色值表示相应的函数积分值：



该图像的两个通道分别表示两个积分项的值，基于该值就能计算得到函数 BRDF 的积分值了。

微表面材质和物理渲染理论我是要放在《PBRT》系列书中的专业知识理论与代码实战中进行仔细讲解的，所以这里就先不再赘述物理渲染理论了。

参考文献

[1] https://www.bilibili.com/video/BV1YK4y1T7yY?p=5

[2] https://learnopengl-cn.github.io/07%20PBR/01%20Theory/