有限差分方法近似偏导

Dezeming Family

2021 年 6 月 28 日

DezemingFamily 系列书和小册子因为是电子书，所以可以很方便地进行修改和重新发布。如果您获得了 DezemingFamily 的系列书，可以从我们的网站 [https://dezeming.top/] 找到最新版。对书的内容建议和出现的错误欢迎在网站留言。

目录

一 导数与差分

差分其实是离散数学中用于近似导数的工具，比如前向差分、后向差分以及中心差分：

$$\frac{df(x)}{dx} \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{一.1}$$

$$\frac{df(x)}{dx} \approx \frac{f(x)-f(x-h)}{h} \tag{一.2}$$

$$\frac{df(x)}{dx} \approx \frac{f(x+\frac{h}{2})-f(x-\frac{h}{2})}{h} \tag{一.3}$$

那么现在有一个问题，这样近似导数的精度如何呢？我们将函数在某点 x_0 进行泰勒展开，得到：

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) \tag{一.4}$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 + o(x-x_0) \tag{一.5}$$

因此：

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0) + \frac{o(x-x_0)}{(x-x_0)} \tag{一.6}$$

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x} - \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0) - \frac{o(x-x_0)}{(x-x_0)} \tag{一.7}$$

根据 x 与 x_0 的大小关系就可以写为前向差分和后向差分表示形式，误差值为：

$$-\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0) - \frac{o(x-x_0)}{(x-x_0)} \tag{一.8}$$

我们设 h 为正数，分别令 x 等于 x_0+h 和 x_0-h，得到：

$$f(x_0-h) = f(x_0) + f'(x_0)((x_0-h)-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)((x_0-h)-x_0)^2 + o(x-x_0) \tag{一.9}$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(-h) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(-h)^2 + o(x-x_0) \tag{一.10}$$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)((x_0+h)-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)((x_0+h)-x_0)^2 + o(x-x_0) \tag{一.11}$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2!}f''(x_0)h^2 + o(x-x_0) \tag{一.12}$$

上面的两个等式相减，就能化简为一阶中心差分，相加再化简就能得到二阶中心差分：

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} \tag{一.13}$$

$$f''(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2} \tag{一.14}$$

二　二元函数导数与差分

因为图像相当于一个二元函数，根据 Dezeming Family 的《多元函数（及向量函数）的泰勒展开》，我们可以得到：

$$f(a_1+\Delta a_1, a_2+\Delta a_2) \tag{二.1}$$

$$= f(a_1,a_2) \tag{二.2}$$

$$+ \left(\Delta a_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,a_2) + \Delta a_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,a_2)\right) \tag{二.3}$$

$$+ \frac{1}{2!}\left((\Delta a_1)^2 \frac{\partial f}{\partial x_1^2} + \Delta a_1 \Delta a_2 \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_2}\right. \tag{二.4}$$

$$\left. + \Delta a_1 \Delta a_2 \frac{\partial f}{\partial x_2 \partial x_1} + (\Delta a_2)^2 \frac{\partial f}{\partial x_2^2}\right) + ... \tag{二.5}$$

分别令 (a_1,a_2) 分别为 (h,h)、$(h,-h)$、$(-h,h)$ 和 $(-h,-h)$，然后联立，我们就能得到：

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a_1^2} = \frac{\Big(f(a_1,a_2+h)-f(a_1,a_2)\Big)-\Big(f(a_1,a_2)-f(a_1,a_2-h)\Big)}{h^2} \tag{二.6}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a_2^2} = \frac{\Big(f(a_1+h,a_2)-f(a_1,a_2)\Big)-\Big(f(a_1,a_2)-f(a_1-h,a_2)\Big)}{h^2} \tag{二.7}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a_1 \partial a_2} = \frac{f(a_1+h,a_2+h)+f(a_1-h,a_2-h)-f(a_1-h,a_2+h)-f(a_1+h,a_2-h))}{4h^2} \tag{二.8}$$

三阶导和四阶导我们也是可以计算出来的，但图像中一般二阶导比较常用。

我们设相邻像素间距为 1，即 h 为 1。至于为什么 h 是 1，其实只是为了计算方便。我们可以思考，如果我们分别用 400*300 和 4000*3000 的分辨率相机去拍摄同一张图像，这两张图像的导数分别应该怎么求呢？我们并不知道真实的导数，因为我们并不能获得真正连续的数据，因此我们使用“梯度”这一个术语来表示相邻像素值的变化特性。当然，对于一些特定的场合，可能会有不同的处理方法，但是差分的基本原理都是一样的。

参考文献

[1] 暂时还没有参考文献