协方差与相关系数

Dezeming Family

2021 年 7 月 13 日

DezemingFamily 系列书和小册子因为是电子书，所以可以很方便地进行修改和重新发布。如果您获得了 DezemingFamily 的系列书，可以从我们的网站 [https://dezeming.top/] 找到最新版。对书的内容建议和出现的错误欢迎在网站留言。

目录

一 协方差

协方差描述了两个变量之间的相互关系，例如人的身高和体重，一定是有关联的，很胖的一米五小学生的体重也比不过看起来比较瘦的姚明的体重。

对于二维随机变量 (X,Y)，定义其协方差为：

$$Cov(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\} \tag{一.1}$$

如果方差 $D(X)\neq 0$ 且 $D(Y)\neq 0$，则称相关系数为：

$$\rho_{X,Y}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} \tag{一.2}$$

协方差的计算式可以进行化简，我们经常会使用下式来计算协方差：

$$Cov(X,Y)=E\{XY+E(X)E(Y)-E(X)Y-E(Y)X\}=E(XY)-E(X)E(Y) \tag{一.3}$$

二 协方差性质

我们先列举出一些协方差的相关性质：

$$Cov(a_1X+b_1,a_2Y+b_2)=a_1a_2Cov(X,Y) \tag{二.1}$$

$$Cov(X_1+X_2,Y)=Cov(X_1,Y)+Cov(X_2,Y) \tag{二.2}$$

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2Cov(X,Y) \tag{二.3}$$

$$D(X-Y)=D(X)+D(Y)-2Cov(X,Y) \tag{二.4}$$

$$|\rho_{XY}|\leq 1 \tag{二.5}$$

当 X 与 Y 相互独立时，$Cov(X,Y)=0$。$|\rho_{X,Y}|=1$ 的充分必要条件是 X 与 Y 完全呈线性关系，即 $P(Y=aX+b)=1$，a，b 为常数。

当 X 与 Y 相互独立的时候，相关系数为 0（毕竟协方差为 0），但当相关系数为 0 时，不代表相互独立，因为相关系数只是代表线性关系，我们举个例子来说明一下。

例：X 在 $[-1,1]$ 上均匀分布，$Y=X^2$，$Z=3X+1$，求 $Cov(X,Y)$ 和 $Cov(X,Z)$ 的值。

首先先计算 $Cov(X,Y)$：

$$E(X)=0 \tag{二.6}$$

$$E(Y)=E(X^2)=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}X^2dX=\frac{1}{3} \tag{二.7}$$

$$E(XY)=E(X^3)=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}X^3dX=0 \tag{二.8}$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{4}{3} \tag{二.9}$$

$$Cov(XY)=E(XY)-E(X)E(Y)=0 \tag{二.10}$$

但是显然 X 和 Y 之间的关系并不独立。

我们再计算 $Cov(X,Z)$：

$$E(X)=0 \tag{二.11}$$

$$E(Z)=E(3X+1)=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(3X+1)dX=1 \tag{二.12}$$

$$E(XZ)=E(3X^2+X)=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(3X^2+X)dX=1 \tag{二.13}$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{2}{3} \tag{二.14}$$

$$Cov(XZ)=E(XZ)-E(X)E(Z)=1 \tag{二.15}$$

$$E(Z^2)=4 \tag{二.16}$$

$$D(Z)=E(Z^2)-[E(Z)]^2=3 \tag{二.17}$$

$$\rho_{XZ}=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3}}=1 \tag{二.18}$$

可以看到，完全呈线性关系的相关系数为 1。

三 协方差矩阵

当我们有 n 维变量时，记为 $X=(X_1,X_2,...,X_n)^T$，设 $c_{ij}=Cov(X_i,X_j)$，$j\in[0,n]$，假如所有的协方差都存在，那么就可以构造出协方差矩阵：

$$\begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,n} \\ \cdots & & & \\ c_{n,1} & c_{n,2} & \cdots & c_{n,n} \end{bmatrix} \tag{三.1}$$

因为 $Cov(X_i,X_j)=Cov(X_j,X_i)$，所以上述协方差矩阵是对称矩阵。

协方差矩阵可以写为：

$$C=E\big[(X-\overline{X})(X-\overline{X})^T\big] \tag{三.2}$$

如果您看过 DezemingFamily 的《正定矩阵与负定矩阵》一书，您就能发现它是一个半正定矩阵，证

明过程如下，对于任意 n 维向量 $\boldsymbol{x}$：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}^T C\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x}^T E\big[(X-\overline{X})(X-\overline{X})^T\big]\boldsymbol{x} && (三.3)\\
&= E\big[\boldsymbol{x}^T(X-\overline{X})(X-\overline{X})^T\boldsymbol{x}\big] && (三.4)\\
&= E\Big[\big(\boldsymbol{x}^T(X-\overline{X})\big)\big(\boldsymbol{x}^T(X-\overline{X})\big)^T\Big] && (三.5)
\end{aligned}$$

可以看到 $\big(\boldsymbol{x}^T(X-\overline{X})\big)\big(\boldsymbol{x}^T(X-\overline{X})\big)^T$ 其实就是平方关系，因此是大于等于 0 的，当且仅当 $X=\overline{X}$ 时才为 0，所以只要方差不为 0（随机变量 X 存在多种值），协方差矩阵就是正定矩阵。

协方差矩阵因为可以表示成矩阵形式，所以就可以实现各种运算，比如相似对角化，在各种控制论、信号分析、主成分分析等领域都有非常重要的作用。

参考文献

[1] https://zhuanlan.zhihu.com/p/44860862