Woodcock-tracking 无偏性证明

Dezeming Family

2021 年 10 月 08 日

DezemingFamily 系列书和小册子因为是电子书，所以可以很方便地进行修改和重新发布。如果您获得了 DezemingFamily 的系列书，可以从我们的网站 [https://dezeming.top/] 找到最新版。对书的内容建议和出现的错误欢迎在网站留言。

目录

一 Woodcock 追踪的实际数学意义

Woodcock 追踪在论文 [1] 中证明是无偏的，但论文一的表述可能并不是非常亲民，所以在这里我打算重新表述一下。这里的描述是基于计算机图形学的，但并没有对证明过程进行修改。里面涉及到好几篇论文的方法，都在文中进行了引用。

穿透率描述了光移动某个距离 t 没有发生碰撞的概率。穿透率（transmittance）[2] 描述为：

$$T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=e^{-\int_0^y \mu_t(\boldsymbol{x}-t\omega)dt} \tag{一.1}$$

即从 $\boldsymbol{x}$ 点到 $\boldsymbol{y}$ 点对衰减率 μ_t 的积分。

$$P(X>t)=T(t) \tag{一.2}$$

累积概率密度函数 F(t) 是上述概率的互补概率，即：

$$F(t)=1-T(t) \tag{一.3}$$

概率密度函数 (PDF) 就可以表示为:

$$p(t)=\frac{dF(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left(1-e^{-\tau(t)}\right)=\mu_t(t)e^{-\tau(t)} \tag{一.4}$$

我们不考虑实际的意义，而是把这个 PDF 函数简化为：

$$F(x)=1-e^{-\int_0^x \mu(y)dy} \tag{一.5}$$

$$p(x)=\mu(x)e^{-\int_0^x \mu(y)dy} \tag{一.6}$$

这里的 x 叫做自由路径，即光前进距离 x 才会发生碰撞。当 x 大于 x_{max}（设定的最大距离），这说明光子一直没有发生碰撞。现在我们希望产生一系列的样本 x，这些 x 需要满足上述概率密度分布。

二　实现方法

我们先尝试“反函数法”生成符合某概率密度的方式：

$$F(x)=1-e^{-\int_0^x \mu(y)dy}=1-e^{-\tau(x)} \tag{二.1}$$

$$\ln\left(e^{-\int_0^x \mu(y)dy}\right)=\ln\Big(1-F(x)\Big) \tag{二.2}$$

$$\int_0^x \mu(y)dy=-\ln\Big(1-F(x)\Big) \tag{二.3}$$

$$\tau(x)=-\ln\Big(1-F(x)\Big) \tag{二.4}$$

令 $F(x)=\xi\in rand(0,1)$，代入，就可以得到 τ 的关于 $F(x)$ 的概率密度分布:

$$\tau(x)=-\ln\Big(1-\xi\Big) \tag{二.5}$$

τ 被称为光学厚度，我们只需要让采样中某一段积累的光学厚度等于 τ，就能得到符合 $p(x)$ 的概率密度分布 [3]。也就是说可以通过 raymarch 的方法，当前一段累加的 $\tau((t-1)\Delta)\leq\tau$，且后一段 $\tau(t\Delta)>\tau$，我们就认为 t 是近似解。当然这种方式除非 $\Delta\to 0$，否则偏差会很大。

现在我们考虑无偏方法，我们先介绍论文 [1] 的第一种方法。首先根据下面的概率密度分布来生成样本 η：

$$F(Y)=\int_0^Y e^{-v}dv,\quad 0\leq Y \tag{二.6}$$

我曾经认为论文 [1] 中上述公式写错了，应该是这样：

$$F(Y)=\int_0^Y ve^{-v}dv,\quad 0\leq Y \tag{二.7}$$

没有这个 v，概率密度积分都不能保证为 1 啊。但是仔细一看才发现没有错，其实就是应该这样，设 $v=\int_0^\theta \mu(x)dx$，则 $dv=\mu(x)dx$，故论文原式成立。

然后通过如下方式生成样本 θ：

$$\eta=\phi(\theta)=\int_0^\theta \mu(x)dx \tag{二.8}$$

$$\theta=\phi^{-1}(\eta) \tag{二.9}$$

这就是反函数法得到随机样本的过程。

在图形学中，实现方法其实就是 woodcock 追踪，用来生成符合上述概率密度的自由路径长度 x：

t = 0;

do

　η = random(0,1);

　t = t - $\frac{log(1-\eta)}{\overline{\mu}}$;

　if $(t\geq d)$ **then**

　　break;

　end

　ξ = random(0,1);

while $\xi>\frac{\mu(o+t*\omega)}{\overline{\mu}}$;

return t;

注意这里选择的 $\overline{\mu}$ 要大于中间遇到的所有 $\mu(o+t*\omega)$。

这里的无偏性主要依赖于两个方面,一是前进距离 $-\frac{log\left(1-rand(0,1)\right)}{\overline{\mu}}$,二是判断是否碰撞的概率 $rand(0,1)>\frac{\mu(o+t*\omega)}{\overline{\mu}}$。

三　无偏性证明

我们设射线从 o 出发，沿着方向 ω 采样。

符号设定

设我们有无限多个独立的随机数 ξ_i，符合下式概率密度分布：

$$P(\xi_i \le X) = F_\xi(X) = \int_0^X \overline{\mu} e^{-\overline{\mu}x} dx \tag{三.1}$$

设 $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n, ...$ 是 $[0,1]$ 之间的均匀分布。

定义 $\sigma(x) \equiv \frac{\mu(x)}{\overline{\mu}}$，$\alpha(x) = 1 - \sigma(x)$。

令 $\zeta_i = \sum_{j=1}^{i} \xi_j = \zeta_{i-1} + \xi_i$，且 $\zeta_0 = \xi_0 = 0$。

当 $\rho_n \le \sigma(\zeta_n) = \frac{\mu(\zeta_n)}{\overline{\mu}}$，$n = 1, 2, ..., N$ 时，我们可以认为在一个局部区域光子撞上了粒子，否则光就算是撞上了虚拟粒子 [3]。

让 λ 表示随机变量 ζ_N，我们可以看出，取 $n = N$ 时来得到相应的 λ 值。

生成符合我们需求的概率密度分布的 λ 方式如下：

i=0,ζ_0=0;

do

　i=i+1;

　生成 ξ_i 和 ρ_i;

　$\zeta_i = \zeta_{i-1} + \xi_i$;

while *($\rho_i > \frac{\mu(\zeta_i)}{\overline{\mu}}$)*;

λ=ζ_i;

Algorithm 1: 算法描述

注意这里生成 ξ_i 的计算式就是 $-\frac{log(1-rand(0,1))}{\overline{\mu}}$，所以论文 [1] 中的这个算法描述和我们之前给出的是完全一样的。

现在符号都定义完了，接下来就是论文长达三页的证明了（但其实并不难），我们证明的内容是生成的 λ 符合概率密度分布 $F(X)$。

证明思路

我们设事件 $E_1 = \{\rho_1 \le \sigma(\zeta_1), \zeta_1 \le Z\}$，Z 是 λ 范围内任意固定值。

$E_2 = \{\rho_1 > \sigma(\zeta_1), \rho_2 \le \sigma(\zeta_2), \zeta_2 \le Z\}$。

$E_n = \{\rho_1 > \sigma(\zeta_1), \rho_2 > \sigma(\zeta_2), ..., \rho_{n-1} > \sigma(\zeta_{n-1}), \rho_n \le \sigma(\zeta_n), \zeta_n \le Z\}$。

上面的公式可以理解为，在某个距离 Z 以内，前进 n 次距离以后才发生碰撞的概率。因此：

$$P[\lambda \le Z] = F_\lambda(Z) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n) \tag{三.2}$$

代入前面关于 ξ_i 与 ζ_i 之间的关系，可以得到：

$$P[E_1] = P\Big[\rho_1 \le \sigma(\xi_1), \xi_1 \le Z\Big] \tag{三.3}$$

$$P[E_n] = P\Big[\rho_1 > \sigma(\xi_1), ..., \rho_{n-1} > \sigma\Big\{\sum_{i=1}^{n-1}\xi_i\Big\}, \rho_n \le \sigma\Big\{\sum_{i=1}^{n}\xi_i\Big\}, \xi_n \le Z - \sum_{i=1}^{n-1}\xi_i\Big] \tag{三.4}$$

我们可以用边缘概率密度来解，给定 $\xi_1 = x_1$：

$$f(x_1) = P\big[\rho_1 \le \sigma(\xi_1) \big| \xi_1 = x_1\big] = \sigma(x_1) \tag{三.5}$$

$$P[E_1] = \int_0^Z P\big[\rho_1 \le \sigma(\xi_1) \big| \xi_1 = x_1\big] dF_\xi(x_1) = \int_0^Z \sigma(x_1)\overline{\mu} e^{-\overline{\mu}x_1} dx_1 \tag{三.6}$$

我个人感觉 $P[E_1]$ 应该是这么得到的：

$$P(\xi_i \leq X) = F_\xi(X) = \int_0^X f(x)dx \tag{三.7}$$

$$P[E_1] = P\Big[\rho_1 \leq \sigma(\xi_1), \xi_1 \leq Z\Big] \tag{三.8}$$

$$P[E_1] = \int_0^Z P\big[\rho_1 \leq \sigma(\xi_1)\big|\xi_1 = x_1\big] f(x_1)dx_1 \Longrightarrow \tag{三.9}$$

$$P[E_1] = \int_0^Z P\big[\rho_1 \leq \sigma(\xi_1)\big|\xi_1 = x_1\big] dF_\xi(x_1) \tag{三.10}$$

同理，可以得到 $P(E_2)$：

$$P[E_2] = \int_0^Z \int_0^{Z-x_1} P\big[\rho_1 > \sigma(\xi_1), \rho_2 \leq \sigma\big\{\sum_{i=1}^{2}\xi_i\big\}\big|\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2\big] dF_{\xi_1,\xi_2}(x_1, x_2) \tag{三.11}$$

这里的 $Z - x_1$ 是因为当 $\xi_1 = x_1$ 时，要保证 $x_1 + x_2 \leq Z$，因此 x_2 的变化范围就是 $[0, Z - x_1]$。尽管从实际物理意义上来说 x_2 的变化区域应该是 $[x_1, Z]$，但不明白为什么论文中的积分区域是 $[0, Z - x_1]$，可能是因为反正是 n 个独立同分布的样本，谁在前谁在后都一样吧。

我们可以得到 $P(E_n)$：

$$\begin{aligned}P[E_n] = &\int_0^Z \int_0^{Z-x_1} ... \int_0^{Z-\sum_{i=1}^{n-1} x_i} \\ &P\big[\rho_1 > \sigma(\xi_1), ..., \rho_{n-1} > \sigma\big\{\sum_{i=1}^{n-1}\xi_i\big\}, \rho_n \leq \sigma\big\{\sum_{i=1}^{n}\xi_i\big\}\big|\xi_1 = x_1, ..., \xi_n = x_n\big] \\ &dF_{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n}(x_1, x_2, ..., x_n)\end{aligned} \tag{三.12}$$

后面的 dF 表示变量的联合概率密度分布。

由于 $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n$ 是相互独立的，所以上式中，被积分项可以表示为：

$$\begin{aligned}&P\big[\rho_1 > \sigma(\xi_1), ..., \rho_{n-1} > \sigma\big\{\sum_{i=1}^{n-1}\xi_i\big\}, \rho_n \leq \sigma\big\{\sum_{i=1}^{n}\xi_i\big\}, \xi_n \leq Z - \sum_{i=1}^{n-1}\xi_i\big|\xi_1 = x_1, ..., \xi_n = x_n\big] \\ =&P\Big[\rho_1 > \sigma(\xi_1)|\xi_1 = x_1\Big] \times \cdots \times P\Big[\rho_{n-1} > \sigma\big(\sum_{i=1}^{n-1}\xi_i\big)|\xi_1 = x_1, ..., \xi_{n-1} = x_{n-1}\Big] \\ &\times P\Big[\rho_n \leq \sigma\big(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\big)|\xi_1 = x_1, ..., \xi_n = x_n\Big]\end{aligned} \tag{三.13}$$

由于 $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ 是独立同分布的，所以：

$$dF_{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = dF_{\xi_1}(x_1)...dF_{\xi_n}(x_n) = dF_\xi(x_1)...dF_\xi(x_n) \tag{三.14}$$

另外可知：

$$P\Big[\rho_n > \sigma\big\{\sum_{i=1}^{n}\xi_i\big\}\big|\xi_1 = x_1, ..., \xi_n = x_n\Big] = 1 - \sigma\big\{\sum_{i=1}^{n}x_i\big\} \tag{三.15}$$

因此，把它们代入到 $P(E_n)$ 中，就可以得到：

$$\begin{aligned}P[E_n] = &\int_0^Z \int_0^{Z-x_1} ... \int_0^{Z-\sum_{i=1}^{n-1} x_i} \\ &P\Big[\rho_1 > \sigma(\xi_1)|\xi_1 = x_1\Big] \times \cdots \times P\Big[\rho_{n-1} > \sigma\big(\sum_{i=1}^{n-1}\xi_i\big)|\xi_1 = x_1, ..., \xi_{n-1} = x_{n-1}\Big] \\ &\times P\Big[\rho_n \leq \sigma\big(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\big)|\xi_1 = x_1, ..., \xi_n = x_n\Big] dF_\xi(x_1)...dF_\xi(x_n)\end{aligned} \tag{三.16}$$

$$
\begin{aligned}
P[E_n] = &\int_0^Z \int_0^{Z-x_1} ... \int_0^{Z-\sum_{i=1}^{n-1} x_i} \\
&\Big[1-\sigma(x_1)\Big] \cdot \cdot \cdot \Big[1-\sigma(\sum_{i=1}^{n-1} x_i)\Big] \Big[\sigma(\sum_{i=1}^{n} x_i)\Big] \overline{\mu} e^{-\overline{\mu} x_1} ... \overline{\mu} e^{-\overline{\mu} x_1} dx_1 ... dx_n
\end{aligned} \tag{三.17}
$$

引入 $z_i = (\sum_{j=1}^{i} x_j)$ 和 $\alpha(\cdot) = 1 - \sigma(\cdot)$：

$$
P[E_1] = \int_0^Z \sigma(z_1) \overline{\mu} e^{-\overline{\mu} z_1} dz_1 \tag{三.18}
$$

$$
\begin{aligned}
P[E_n] &= \int_0^Z dz_n \overline{\mu}^n \sigma(z_n) e^{-\overline{\mu} z_n} \int_0^{z_n} dz_{n-1} \alpha(z_{n-1}) \int_0^{z_{n-1}} dz_{n-2} \alpha(z_{n-2}) \cdot \cdot \cdot \int_0^{z_2} dz_1 \alpha(z_1) \\
&= \int_0^Z dz_1 \sigma(z_1) \overline{\mu}^n e^{-\overline{\mu} z_1} \int_0^{z_1} dz_2 \alpha(z_2) \int_0^{z_2} \cdot \cdot \cdot \int_0^{z_{n-1}} dz_n \alpha(z_n)
\end{aligned} \tag{三.19}
$$

注意上式中，$e^{-\overline{\mu} z_n} = e^{-\overline{\mu} x_1} \cdot \cdot \cdot e^{-\overline{\mu} x_n}$。

剩下的内容就是数学归纳法了，因为没有什么关于实际意义的内容，所以不再赘述。另外，在 [4] 的补充材料里，还有更一般的分析讨论，大家有兴趣可以参考一下。

参考文献

[1] W. A. Coleman . Mathematical Verification of a Certain Monte Carlo Sampling Technique and Applications of the Technique to Radiation Transport Problems[J]. Nuclear Science and Engineering. 1968.

[2] J Novák, Georgiev I , Hanika J , et al. Monte Carlo Methods for Volumetric Light Transport Simulation[J]. Computer Graphics Forum, 2018.

[3] L Szirmay-Kalos, B Tóth, Magdics M . Free Path Sampling in High Resolution Inhomogeneous Participating Media[J]. Computer Graphics Forum, 2011.

[4] Novak J , Selle A , Jarosz W . Residual ratio tracking for estimating attenuation in participating media[J]. ACM Transactions on Graphics, 2014, 33(6CD):179.1-179.11.