复数的幅角与旋转

Dezeming Family

2021 年 12 月 22 日

DezemingFamily 系列书和小册子因为是电子书，所以可以很方便地进行修改和重新发布。如果您获得了 DezemingFamily 的系列书，可以从我们的网站 [https://dezeming.top/] 找到最新版。对书的内容建议和出现的错误欢迎在网站留言。

目录

一 复数与幅角表示 **1**

二 角度与旋转 **2**

三 复数与导数 **2**

参考文献 **3**

一 复数与幅角表示

复数作为一个二维数，自然是可以表示在一个平面上。表示方法其实并不重要，只要我们明白它是复数即可。可以用 $x+iy$ 来表示，也可以用 (x,y) 来表示。

$$z = x + iy \tag{一.1}$$

$$x := Re(z) \tag{一.2}$$

$$y := Im(z) \tag{一.3}$$

既然是平面上的一个点，我们也可以使用幅角方法来表示一个复数：

$$z = x + iy = |z|\angle\theta \tag{一.4}$$

$$\theta := \arg z \tag{一.5}$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{一.6}$$

由于在平面上 $\theta = \theta + k \cdot 2\pi$，$k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$，所以复平面上一个点并不只会有一种幅角表示方法。注意：

$$(r_1\angle\theta_1)(r_2\angle\theta_2) = r_1 r_2\angle(\theta_1 + \theta_2) \tag{一.7}$$

$$\frac{1}{z} \cdot z = 1 \Longrightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{r\angle\theta} = \frac{1}{r}\angle - \theta \tag{一.8}$$

$$\frac{r_1\angle\theta_1}{r_2\angle\theta_2} = \frac{r_1}{r_2}\angle(\theta_1 - \theta_2) \tag{一.9}$$

用幅角表示在平面上的某一个点则可以写为：

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{一.10}$$

根据欧拉公式就可以写为：

$$z = |z|e^{i\theta} \tag{一.11}$$

$$|z_1|e^{i\theta_1}|z_2|e^{i\theta_2} = |z_1 z_2|e^{i(\theta_1+\theta_2)} \tag{一.12}$$

二 角度与旋转

考虑一个事实，纯复数 i 乘以某个复数，相当于把这个复数以原点为中心逆时针转 90 度：

$$i = 1\angle\frac{\pi}{2} \tag{二.1}$$

$$iz = (1\angle\frac{\pi}{2})(|z|\angle\theta) = |z|\angle(\theta+\frac{\pi}{2}) \tag{二.2}$$

我们思考函数 e^{it}，对其求导，得到：

$$\frac{de^{it}}{dt} = ie^{it} \tag{二.3}$$

想象一个点的位置在时刻 0 是 $e^{i0}=1$，这个点在空间里匀速运动，轨迹是 e^{it}。点运动的方向就是轨迹切线的方向，切线的参数表示就是 ie^{it}。

我们可以看到，速度方向一直与当前位置呈直角关系（注意速度只有大小和方向，没有“位置”）。所以可以看出，对于函数 e^{it}，当 t 增大时，函数值在复平面上一直绕着单位圆转圈。

三 复数与导数

这个例子来自于 [1]，但是 [1] 的描述有些晦涩难懂。目标：我们要求 $e^{ax}\sin bx$ 的 n 阶导数。

如果考虑点在复平面的位置，那么 $e^{ibt}=\cos bt + i\sin bt$ 就可以看做一个单位复数以角速度 b 绕着原点运行。而如果前面再乘以一个系数 e^{at}（a 是实数），那么就相当于一个点螺旋环绕着离开原点。

设：

$$Z(t) = e^{at}e^{ibt} = e^{at}\cos bt + ie^{at}\sin bt \tag{三.1}$$

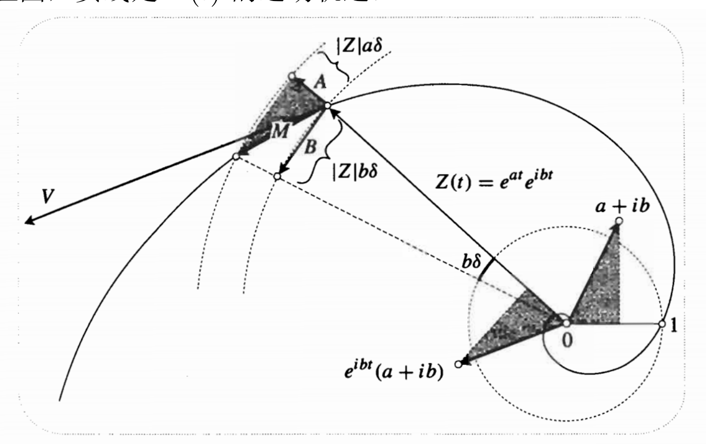
对 $Z(t)$ 求导，可知导数相当于当前点在 t 时刻的速度，而因为只有虚数项求导才会得到虚数，所以对 $e^{at}\sin bt$ 求导就能得到 $Z(t)$ 在 t 时刻的速度的垂直分量。

我们从几何的角度来进行一下剖析：

$$M = Z(t+\delta t) - Z(t) \tag{三.2}$$

$$V = \lim_{\delta\to 0}\frac{M}{\delta} \tag{三.3}$$

如下图，虚线是单位圆，实线是 $Z(t)$ 的运动轨迹：



只要 δ 无穷小，则上图的 A 与 B 构成直角，且 $M=A+B$。我们来求一下 $|A|$ 和 $|B|$ 的长度。注意，由于 $|B|$ 和 $b\delta$ 呈 e^{at} 倍的关系，且 $e^{at}=|Z(t)|$，所以 $|B|=|Z|b\delta$。又由于 A 的长度其实是在 δ 时间的 $|Z|$ 的增量，所以 $|A|=\frac{d|Z(t)|}{dt}\delta = a|Z|\delta$。

根据 $|A|$ 和 $|B|$ 长度的对应关系，可以说 Z 处的阴影三角形正好相似于 $a+ib$ 处的阴影三角形。把后者旋转到 Z 的幅角，$a+ib$ 变为 $e^{ibt}(a+ib)$。

我们可以看到，M 其实就是把 $(a+ib)$ 旋转 Z 的幅角，然后放大 $|Z|\delta$ 倍。所以其实就可以写为：

$$V=\frac{dZ}{dt}=(a+ib)Z \tag{三.4}$$

所有从原点发射的射线，在与螺旋线相交时，射线与螺旋线的切线的夹角都等于 $(a+ib)$ 的幅角，而速率正比于原点到该点的距离。

根据 V 的表达式，可以看出这样求高阶导数就会很容易了：

$$\frac{d^2Z}{dt^2}=\frac{dV}{dt}=(a+ib)^2Z=(a+ib)V \tag{三.5}$$

参考文献

[1] Needham, Tristan. Visual complex analysis. Oxford University Press, 1998.