# 光传输的符号表示


Dezeming Family

Dezeming

Art. No 0
ISBN 000–00–0000–00–0
Edition 0.0

Cover design by Dezeming Family

Published by Dezeming
Printed in China

# 目录


0.1 本书前言 5

1 光传输基本术语定义 6

1.1 表面集 6

1.2 mearuse A 6

1.3 向量和方向 7

1.4 投影立体角的解释 7

2 phase space 和 trajectory space 9

2.1 phase space 9

2.2 trajectory space 9

2.3 The measurement equation 10

2.4 小结 11

3 光线空间与函数 12

3.1 Ray space 12

3.2 throughput measure 12

3.3 光空间的其他表示 13

3.4 光空间的范数函数 14

3.5 函数空间的内积 15

4 光传输算子 16

4.1 散射算子 16

4.2 传播算子 16

4.3 算子的局部性 (Locality) 17

4.4 光传输算子 17

4.5 解算子 (solution operator) 18

5 重要性传输 19

5.1 传感器 19

5.2 测量方程 19

5.3 伴随算子 (Adjoint operators) 20

5.4 重要性传输 20

5.5 符号总结 21

Literature 22

# 前言及简介

*DezemingFamily* 系列书和小册子因为是电子书，所以可以很方便地进行修改和重新发布。如果您获得了 *DezemingFamily* 的系列书，可以从我们的网站 *[https://dezeming.top/]* 找到最新版。对书的内容建议和出现的错误欢迎在网站留言。

## 0.1 本书前言

光传输算法的符号表示是一个很重要的方法，但是在大多数教材中却找不到解释，因此我们只能从一些论文中去学习。然而，很多论文的描述都会有些许出入，因此也很难形成体系。

论文 [1] 被称为学习渲染的必读论文，而或许初学者并不清楚应该何时去阅读。其实，里面涉及的很多内容，例如双向路径追踪、Metropolis 光传输算法等都是渲染中比较高阶的内容了。尽管基础理论并不会很复杂（蒙特卡洛与马尔科夫随机），但要想比较完备地实现，还是需要对离线渲染有一定的造诣。

本文将讲解光传输算法的符号表示，这套符号体系影响深远，直到现在大家都一直在用，因此值得花时间去理顺。本文的符号体系是根据 [1] 进行讲解的，这也是最正统的表示方法。

# 1. 光传输基本术语定义


1.1 表面集 6

1.2 mearuse A 6

1.3 向量和方向 7

1.4 投影立体角的解释 7


本章讲解一些术语定义，为了准确起见，有些术语会使用英文来描述。

## 1.1 表面集

下面对于 surface 和 manifold 的内容只需要简单理解即可，本人暂时也没有从事过实变等内容的研究，并不能做到很彻底的对关于闭集等的理解。

设 $\mathcal{M}$ 表示场景的表面集：场景中有有限个表面 surfaces，构成该表面集 $\mathcal{M}$。

通常每一个 surface 都是“可能有边界的”分段可微二维流形 (manifold)。在这里我们设每个 manifold（标记为 $M$）都是一个闭集，也就是说它必须包含它的边界 $\partial M$，这就防止了邻接 surfaces 之间的间隙（例如，考虑由六个正方形形成的立方体）。

注意 $\mathcal{M}$ 并不一定是一个 manifold，比如一个桌子上放了一个球体。

surfaces 把三维空间划分为许多相连的 cells（比如构成一个球体的 furfaces，构成一个立方体的 surfaces），每个 cell 里面都不含参与介质（也就是说每个 cell 里面的折射率固定），surfaces 就是 cell 的边界。当然也可能存在不属于任何 cell 的 surface，例如空间中漂浮的一个 surface。

## 1.2 mearuse A

我们下面用 $D$ 来作为各种集合的子集，而不是固定的某种表示。

对于 $\mathcal{M}$ 我们定义一个面积测量式 $A$（area measure），$A(D)$ 表示对于区域 $D \subset \mathcal{M}$，求 $D$ 的面积。

我们定义在整个 $\mathcal{M}$ 上的求面积的函数。因为积分微元并不是实数，而是空间中的一个点，所以使用的是勒贝格积分（Lebesgue integral）：

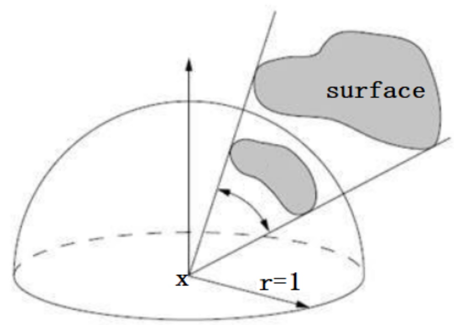
$$\int_{\mathcal{M}} f(\boldsymbol{x}) dA(\boldsymbol{x}) \tag{1.2.1}$$

## 1.3 向量和方向

方向 $\omega$ 被表示为单位向量，我们设全部的方向的集合为 $\mathcal{S}^2$，构成单位球。

给定一个方向集 $D \subset \mathcal{S}^2$，它确定的立体角（solid angle）定义为 $\sigma(D)$。

由 surface $P$ 与点 $x$ 相对应的立体角，通过将 $P$ 投影到以 $x$ 为中心的单位球体上，并计算得到的方向集的面积（立体角大小等于对应单位球区域的面积）来确定的：




设 surface 的法向量为 $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{x})$，对于给定的方向集 $D \subset \mathcal{S}^2$，可以定义投影立体角（值得一提的是，这是用来确定 radiance 的，即 surface 上每单位面积单位投影立体角接受到的能量）：

$$\sigma_{\boldsymbol{x}}^{\perp}(D) = \int_D |\omega \cdot \boldsymbol{N}(\boldsymbol{x})| d\sigma(\omega) \tag{1.3.1}$$

## 1.4 投影立体角的解释

设 $T_{\mathcal{M}}(\boldsymbol{x})$ 是点 $\boldsymbol{x}$ 处的切空间，这个空间里的向量是垂直于 surface 法向量的（与更常见的切平面不同，切空间穿过原点。因此，它是线性空间，而不是仿射空间）：

$$T_{\mathcal{M}}(\boldsymbol{x}) = \left\{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3 | \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{N}(\boldsymbol{x}) = 0\right\} \tag{1.4.1}$$

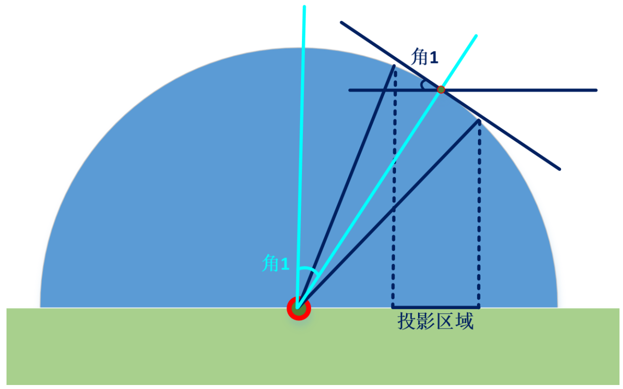
切空间将 $\mathcal{S}^2$ 分成了两个半球，分别是上半球和下半球：

$$upward\ hemisphere: \ \mathcal{H}_+^2 = \left\{\omega \in \mathcal{S}^2 | \omega \cdot \boldsymbol{N}(\boldsymbol{x}) > 0\right\} \tag{1.4.2}$$

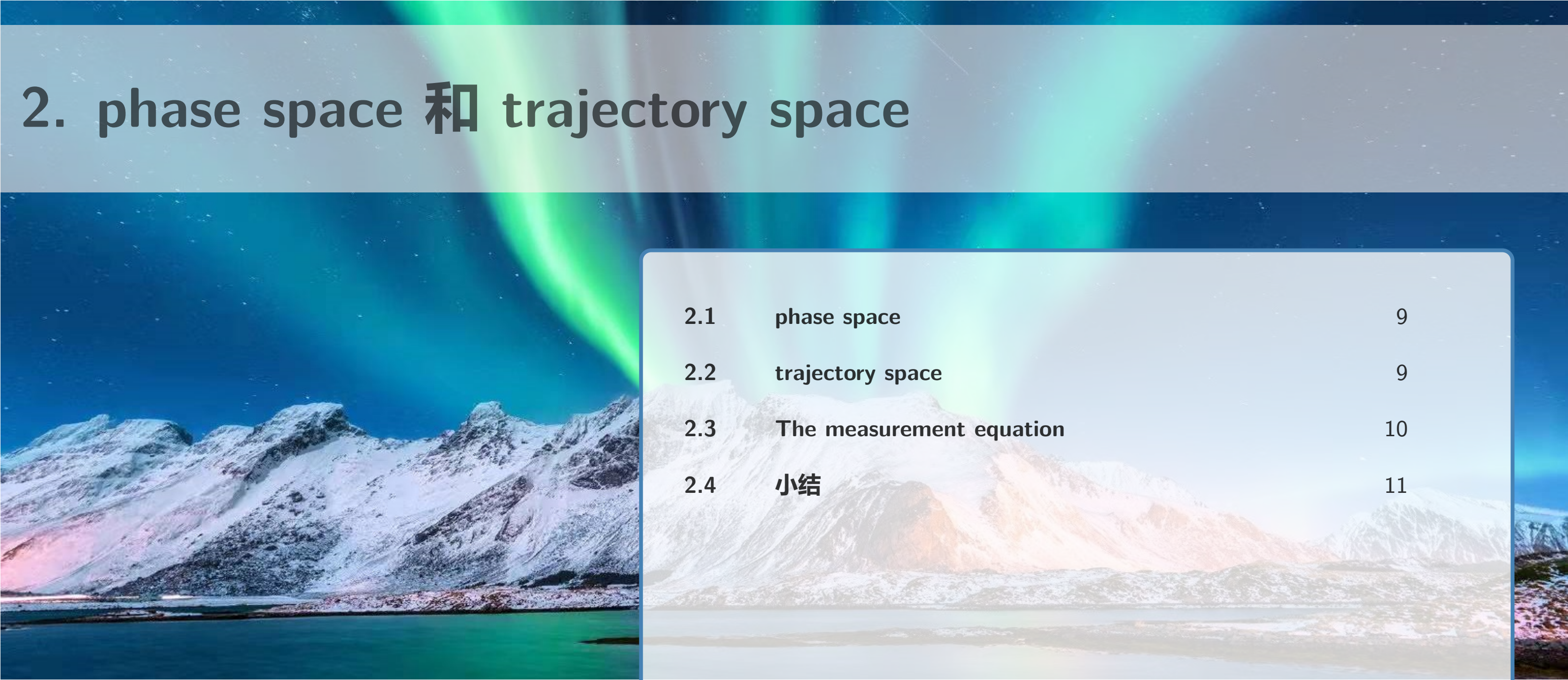
$$downward\ hemisphere: \ \mathcal{H}_-^2 = \left\{\omega \in \mathcal{S}^2 | \omega \cdot \boldsymbol{N}(\boldsymbol{x}) < 0\right\} \tag{1.4.3}$$

对于一个方向集 $D$ 仅仅被一个半球包含，投影立体角就可以通过把 $D$ 垂直地投射到切线空间 $D$ 上来得到，找到相应的投影平面区域面积即可。例如对于整个上半球，相应的投影区域就是一个单位圆盘，因此可得 $\sigma_{\boldsymbol{x}}^{\perp}(\mathcal{H}_+^2) = \pi$。

我们用一个简单的二维情况下的示意图来示意（经过点 $\boldsymbol{x}$ 的两条深青色线表示一个方向集 $D$，注意这个方向集是一个“微元”，只是为了显示更清楚，所以区间画的大了一些）：




可以看到，单位球面上，切线角度角 1 等于角 2，又由于单位球的面积等于其对应的立体角大小，所以这个单位球上的面积对应的投影立体角相当于面积在下面的平面上的投影（即乘以 $\cos\theta$）。



# 2. phase space 和 trajectory space


2.1 phase space 9
2.2 trajectory space 9
2.3 The measurement equation 10
2.4 小结 11


*本章介绍 phase space 和 trajectory space 的简单概念。*

## 2.1 phase space

空间中的微粒，例如中子或者气体分子，可以用它们的位置和速度来表示，这样就有了 $3+2+1=6$ 个自由度的量（空间位置是 3 维，速度方向用单位向量描述是 2 维，还有 1 维是速度大小）。对于 $N$ 个点，可以描述为 $6N$ 维 phase space 的系统状态。

假设光是非偏振而且不相干的，则光子就可以使用位置 $\boldsymbol{x}$、运动方向 $\omega$ 以及波长 $\lambda$，也是 6 维的。因此对于 $N$ 个光子的系统，phase space 将会是 $6N$ 维的。

但是，对于彼此不相互作用的粒子（如光子），让 phase space 对应于单个粒子的状态更为有用。phase space 是一个 6 维（位置、方向、波长）的空间：

$$\psi = \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S}^2 \times \mathbb{R}^+ \tag{2.1.1}$$

$N$ 个光子的系统可以表示为 $N$ 个点在 6 维空间状态变化的函数。

辐射度量学可以通过记录给定的 phase space 区域的光子数量或者密度（比如在一个空间 volume 中）。

## 2.2 trajectory space

我们讨论一下时间维度。如果所有的光子的 phase space 位置被绘制为随着时间变化的函数，则可以得到在 trajectory space（轨迹空间）上的一维函数：

$$\Psi = \mathbb{R} \times \psi \tag{2.2.1}$$

其中第一个参数表示时间。辐射测量 (Radiometric measurements) 是通过沿着这些曲线指定一组光子事件 (photon events)，然后以各种方式测量这些光子事件的分布来定义的。

一个光子事件是在轨迹空间 $\Psi$ 中的一个单个的点。有些事件有很自然的定义，例如每个发射、吸收或散射事件对应于沿光子轨迹的单个点（事实上散射事件应该是对应于光子轨迹中的两个点，因为方向 $\omega$ 发生了变化，从而导致轨迹不连续；类似地，在荧光材料中，波长参数可以不连续地改变。因此，我们必须根据在碰撞之前还是之后测量光子状态来区分内散射事件和外散射事件）。

对于空间中给定的一个平面 $P$，光子事件与平面相交可以定义为在轨迹空间与表面相交：

$$\mathbb{R} \times P \times \mathcal{S}^2 \times \mathbb{R}^+ \tag{2.2.2}$$

一旦定义了光子事件，我们就可以我们得到了轨迹空间中的点集，这些点集可能会分布在整个空间（比如介质空间），也有可能只在低维 manifold 中（比如只定义 surface 上的光子事件）。我们测量这些事件的分布，就可以定义辐射度量学。

由于光子事件的量极其之大，所以我们一般使用连续分布来衡量（比如定义能量 $Q$），而不是计数给定轨迹空间的光子事件量。

## 2.3 The measurement equation

由于渲染中的辐射度量学的内容在这里已经默认被大家所熟知，所以这里我们不再进行过多介绍，我们直接描述光传输。

光传输其实就是计算 measurements，例如对于成像，就是计算第 $j$ 个像素的 measurement $I_j$。

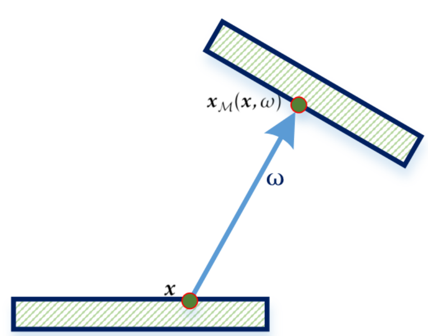
每一个 measurement 其实都是一个假设的传感器 (hypothetical sensor)，测量照射在它上的 radiance。这个传感器可能会像真实的相机或者 BSDF 函数一样，对于不同的位置和不同的照射方向响应不同，因此我们使用传感器响应度 (responsivity)$W_e(\boldsymbol{x}, \omega)$ 来描述：

$$I = \int_{\mathcal{M}\times\mathcal{S}^2} W_e(\boldsymbol{x}, \omega) L_i(\boldsymbol{x}, \omega) dA(\boldsymbol{x}) d\sigma^{\perp}_{\boldsymbol{x}}(\omega) \tag{2.3.1}$$

我们一般会考虑平衡状态下的辐射度函数（因为光传播的非常快，我们看到的瞬时效果基本上是已经稳定的结果），一个方向的入射光 $L_i(\boldsymbol{x}, \omega)$ 就是：

$$L_i(\boldsymbol{x}, \omega) = L_o(\boldsymbol{x}_{\mathcal{M}}(\boldsymbol{x}, \omega), -\omega) \tag{2.3.2}$$

其中，$\boldsymbol{x}_{\mathcal{M}}(\boldsymbol{x}, \omega)$ 其实是一个 ray-casting 函数，返回从 $\boldsymbol{x}$ 沿着方向 $\omega$ 遇到的最近的表面点。示意图如下，注意 $\omega$ 一直指向入射方向的反方向，这是在 BSDF 表示中的一种习惯性的用法：



这里的 $L_o$ 包括直接从 $\boldsymbol{x}_{\mathcal{M}}$ 发出的光以及其他照射到该点然后散射到 $-\omega$ 方向的光。

我们来介绍一下重要性和伴随方法（Importance and adjoint methods），虽然它主要应用于双向方法的描述（例如双向光传输），但我们还是简单描述一下。

响应度 $W_e(\boldsymbol{x},\omega)$ 经常被作为一个发射项 (emitted quantity)，在这个语言环境下，它就被叫做 emitted importance function（因为它指明了光沿着每个光线到响应的测量 $I$）。

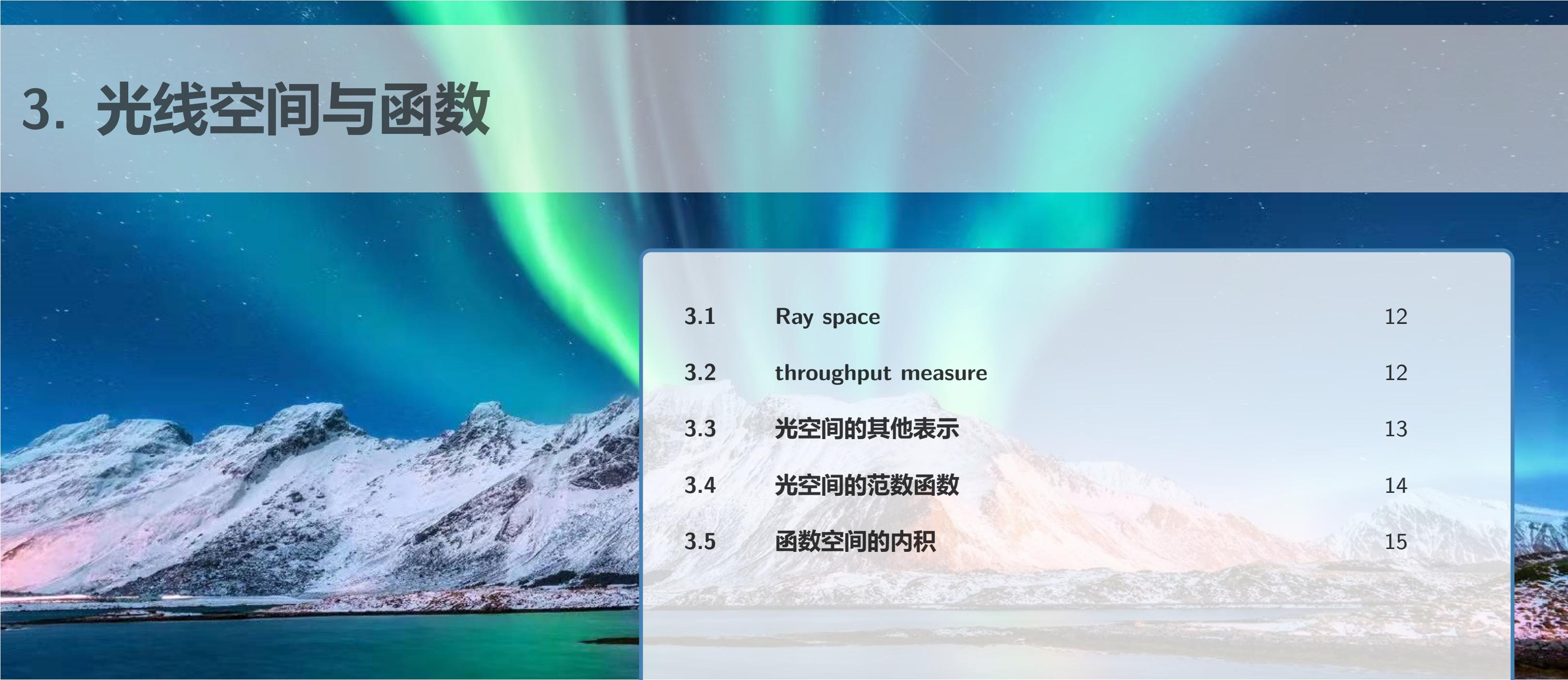
之后定义 importance transport equation：

$$W(\boldsymbol{x},\omega)=W_e(\boldsymbol{x},\omega)+\int_{\mathcal{S}^2}W(\boldsymbol{x}_{\mathcal{M}}(\boldsymbol{x},\omega_i),-\omega_i)f_s(\boldsymbol{x},\omega_o\to\omega_i)d\sigma_{\boldsymbol{x}}^{\perp}(\omega_i) \tag{2.3.3}$$

其中，$W(\boldsymbol{x},\omega)$ 叫做平衡重要性函数 (equilibrium importance function)，描述了空间场中平衡状态下传感器接受到的辐射度。

## 2.4 小结

为了更好的描述渲染方程的算法，我们需要构建更一般化的工具。构建基础是 measures, function spaces, inner products, and linear operators，下一章我们开始构建光传输的操作符。



# 3. 光线空间与函数


3.1 Ray space 12
3.2 throughput measure 12
3.3 光空间的其他表示 13
3.4 光空间的范数函数 14
3.5 函数空间的内积 15


本章介绍光线空间与函数的一些描述和表示。

## 3.1 Ray space

对于 ray 空间 $\mathcal{R}$ 包括了从场景中表面点发出的所有 ray。一般来说，$\mathcal{R}$ 是笛卡尔积（Cartesian product，定义并不难，大家可以在网络上搜索其定义）表示的：

$$\mathcal{R} = \mathcal{M} \times \mathcal{S}^2 \tag{3.1.1}$$

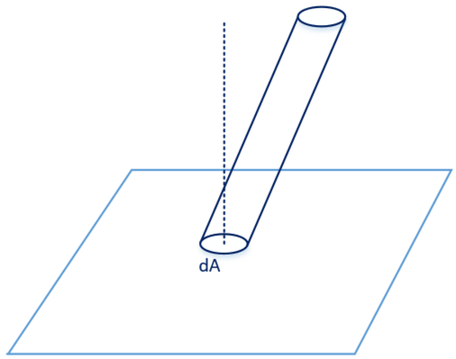
其中，$\mathcal{M}$ 表示场景中所有的 surfaces，$\mathcal{S}^2$ 表示所有的方向 $\omega$。对于没有参与介质的场景来说，我们没有必要表示空间中每个点的辐射度，因此只表示在表面上的辐射度就可以了。

## 3.2 throughput measure

我们在 $\mathcal{R}$ 上定义一个测量 measure $\mu$，它被用来在 ray 空间积分函数。考虑在 ray $\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{x}, \omega)$ 周边的一小束 rays，设这些 rays 覆盖的面积是 $dA$，方向所占据的立体角为 $d\sigma$，则这个小的光束的吞吐量 (throughput) 就可以定义为：

$$d\mu(\boldsymbol{r}) = d\mu(\boldsymbol{x}, \omega) = dA(\boldsymbol{x}) d\sigma_{\boldsymbol{x}}^{\perp}(\omega) \tag{3.2.1}$$

其实就是这个样子：




对于 rays 的一般集 $D \subset \mathcal{R}$，我们做一下积分：

$$\mu(D) = \int_D dA(\boldsymbol{x}) d\sigma_{\boldsymbol{x}}^{\perp}(\omega) \tag{3.2.2}$$

$$can\ be\ writen\ as\ \int_{\mathcal{M}} d\sigma_{\boldsymbol{x}}^{\perp}(D_x) dA(\boldsymbol{x}) \quad where\ D_{\boldsymbol{x}} = \{\omega | (\boldsymbol{x}, \omega) \in D\} \tag{3.2.3}$$

对于吞吐量测量也可以写为另外一种形式：

$$d\mu(\boldsymbol{x}, \omega) = |\omega \cdot N_g(\boldsymbol{x})| dA(\boldsymbol{x}) d\sigma(\omega) = dA_{\omega}^{\perp}(\boldsymbol{x}) d\sigma(\omega) \tag{3.2.4}$$

其中，$A^{\perp}$ 是投影面积度量 (projected area measure)。通过这种方式我们可以很容易的定义辐射度，就是每单位吞吐量的功率：

$$L(\boldsymbol{r}) = \frac{d\Phi(\boldsymbol{r})}{d\mu(\boldsymbol{r})} \tag{3.2.5}$$

## 3.3 光空间的其他表示

我们也可以定义为 $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}'$（从表面上的一个点到表面上的另外一个点）：

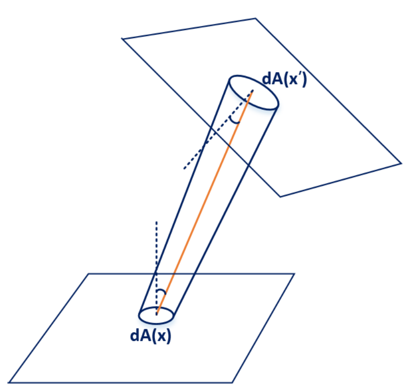
$$\mathcal{R} = \mathcal{M} \times \mathcal{M} \tag{3.3.1}$$

但是注意这样的表示则无法表示 ray 传播到无穷远——这里只关注在 surfaces 之间的 ray 传播。

根据这种表示方式，我们来定义一下吞吐量 $\mu$：

$$d\mu(\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}') = V(\boldsymbol{x} \leftrightarrow \boldsymbol{x}') \frac{\cos(\theta)\cos(\theta')}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'\|^2} dA(\boldsymbol{x}) dA(\boldsymbol{x}') \tag{3.3.2}$$

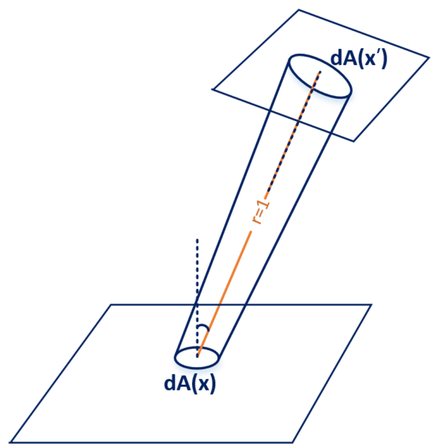
其中，$V(\boldsymbol{x} \leftrightarrow \boldsymbol{x}')$ 表示可见性函数。上式的图示如下：



如果平面微元 $dA(\boldsymbol{x}')$ 的法向量恰好是 $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}'$ 的方向，则 $\cos(\theta')$ 的值就是 1——则可以很好地与对立体角进行微分的形式联系起来（注意 $dA(\boldsymbol{x}')$ 与立体角之间的关系是距离的平方关系）。我们设微元之间的距离 $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\|^2$ 为 1，$\cos(\theta')=1$，且两个微元之间相互可见，则：

$$d\mu(\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}') = dA(\boldsymbol{x}')\cos(\theta)dA(\boldsymbol{x}) \tag{3.3.3}$$

这里的 $dA(\boldsymbol{x}')\cos(\theta)$ 恰好就是对于单位球面上在 $\boldsymbol{x}$ 所在表面的投影面积：




## 3.4 光空间的范数函数

辐射度 (radiance) 或者重要性 (importance) 的分布可以表示为一个实值函数：

$$f : \mathcal{R} \to \mathbb{R} \tag{3.4.1}$$

本节我们研究这类函数的性质，通过函数空间来进行研究，这会对分析光传输算子的特性有帮助。

我们定义 $L_p$ 范数（这里我们规定 $L_p$ 都是有限值）：

$$\|f\|_p = \left( \int_{\mathcal{R}} |f(\boldsymbol{r})|^p d\mu(\boldsymbol{r}) \right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.4.2}$$

$p$ 是一个正整数，且当 $p \to \infty$ 时：

$$\|f\|_\infty = ess\ sup_{r \in \mathcal{R}} |f(\boldsymbol{r})| \tag{3.4.3}$$

这里的 $ess\ sup$ 是上确界。

由于 $L_p(\mathcal{R})$（这里的范数函数的参数是 ray）构成的空间在加法和标量乘法中是封闭的，所以又称为线性空间。

对于一个函数序列 $f_1, f_2, \ldots$ 来说，如果对于任何 $\epsilon > 0$，存在一个索引 $N$，对于任意 $i, j > N$ 来说满足 $\|f_i - f_j\| < \epsilon$，这就是一个柯西序列 (Cauchy sequences)。而如果存在一个函数 $f \in L_p(\mathcal{R})$，满足 $\lim_{N\to\infty} \|f_i - f\| = 0$，则这个柯西序列就收敛。收敛的柯西序列称为完备的函数空间。

## 3.5 函数空间的内积

两个函数的内积 (inner product) 表示为（内积表示法比显式编写积分更简洁，但它也传递了更多信息，因为它可以立即被识别为内积，而不是其他类型的积分）：

$$\left\langle f,g\right\rangle = \int_{\mathcal{R}} f(\boldsymbol{r})g(\boldsymbol{r})d\mu(\boldsymbol{r}) \tag{3.5.1}$$

对于一个存在内积的线性空间，又被称为内积空间。对于内积，可以定义一个关联范数 (associated norm)：

$$\|f\| = \left\langle f,f\right\rangle^{1/2} \tag{3.5.2}$$

内积空间相对于其相关范数是完备的，这称为希尔伯特空间。

# 4. 光传输算子


| | | |
|---|---|---|
| 4.1 | 散射算子 | 16 |
| 4.2 | 传播算子 | 16 |
| 4.3 | 算子的局部性 (Locality) | 17 |
| 4.4 | 光传输算子 | 17 |
| 4.5 | 解算子 (solution operator) | 18 |


本章对散射和传输算子进行描述，然后介绍光传输算子。

## 4.1 散射算子

注意本书的“算子”和“运算符”是混用的（英文 operator），我也不想再修改统一了。

设线性算子 $\mathbf{A}$，它作用于一个函数，将该函数变为另一个函数：

$$\mathbf{A}: \quad \mathcal{F} \to \mathcal{F} \tag{4.1.1}$$

局部散射算子：

$$(\mathbf{K}h)(\boldsymbol{x}, \omega_o) = \int_{\mathcal{S}^2} f_s(\boldsymbol{x}, \omega_i \to \omega_o) h(\boldsymbol{x}, \omega_i) d\sigma_{\boldsymbol{x}}^{\perp}(\omega_i) \tag{4.1.2}$$

当这个算子应用于入射辐射度函数 $L_i$，则返回出射辐射度 $L_o = \mathsf{K}L_i$。这些函数都是定义在整个 ray 空间 $\mathcal{R}$ 上的。

## 4.2 传播算子

传播算子 (propagation operator) 是为了描述光在固定的介质中传播而使用的。

我们先定义一个表面距离函数 (boundary distance function):

$$d_{\mathcal{M}}(\boldsymbol{x}, \omega) = \inf\{d > 0 | \boldsymbol{x} + d\omega \in \mathcal{M}\} \tag{4.2.1}$$

在这里，inf 表示“取最小值”，即 $\boldsymbol{x}$ 沿着 $\omega$ 方向前进能够与某个表面相交的最小距离。如果 $d_{\mathcal{M}}(\boldsymbol{x}, \omega) = \infty$，表示没有与某个表面相交。

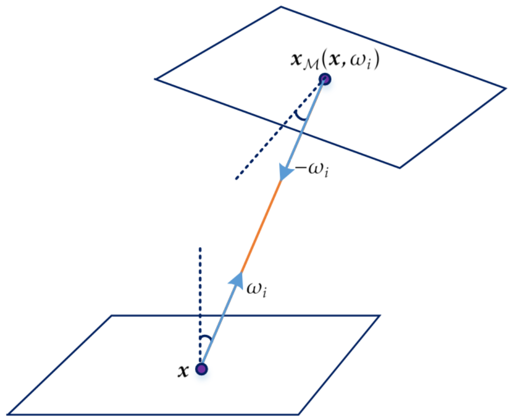
然后我们再定义 ray-casting 函数：

$$\boldsymbol{x}_{\mathcal{M}}(\boldsymbol{x}, \omega) = \boldsymbol{x} + d_{\mathcal{M}}(\boldsymbol{x}, \omega)\omega \tag{4.2.2}$$

光沿着直线传播的过程表示为几何或传播算子 (geometric or propagation operator) $G$：

$$(\mathbf{G}h)(\boldsymbol{x},\omega_i) = \begin{cases} h(\boldsymbol{x}_{\mathcal{M}}(\boldsymbol{x},\omega_i),-\omega_i) & if\ d_{\mathcal{M}}(\boldsymbol{x},\omega) < \infty \\ 0 & otherwise \end{cases} \tag{4.2.3}$$

当我们将该算子作用于 $L_o$ 时（注意这里的 $L_o$ 指的是光离开其他表面，而不是说光从 $\boldsymbol{x}$ 射出的部分），其实就是 $L_i = \mathbf{G}L_o$：




这里有一些需要非常注意的地方。在 BSDF 描述时，$\omega_i$ 是 $L_i$ 的入射方向的反方向，因此，$L_i$ 的方向是 $-\omega_i$。这也是为什么上面的算子是 $-\omega_i$。

当 $f_s$ 是对称的时，$\mathbf{G}$ 和 $\mathbf{K}$ 就都是自伴随的。

## 4.3 算子的局部性 (Locality)

为了计算某个点沿着 $\omega_o$ 的散射辐射度，我们只需要知道该点的其他方向的入射辐射度，这种特性就称为局部性（跟全局场景中其他的 rays 没有任何关系）。换句话说，这个算子 $\mathbf{A}$ 要想计算 $(\mathbf{A}h)(\boldsymbol{r})$ 则只需要一个子集的 $\boldsymbol{r}'$ 来进行估计，而非场景中全部的 $\boldsymbol{r}'$。

传播算子当然也是具有局部性的。而且传播算子比散射算子更具有局部性，因为传播算子只需要知道单个直线上的 ray，而散射算子需要整个平面上入射的 rays，这是 $\mathcal{R}$ 的二维子空间（二维：极坐标经纬度表示）。

可以感受到，这种局部性在有限元光传输计算等可以很有用，这里不再展开描述了。

## 4.4 光传输算子

光传输算子：

$$\mathbf{T} = \mathbf{KG} \tag{4.4.1}$$

它的作用是在单散射事件中，判断一束光射到表面然后散射的部分：

$$L = L_e + \mathbf{KG}L = L_e + \mathbf{T}L \tag{4.4.2}$$

其中 $L_e(\boldsymbol{r})$ 表示发射的辐射度函数。注意这里和前面描述的传播算子一样，我们需要使用统一的 $L$（$L_o$）。它的原本的形式是：

$$L_o(\boldsymbol{x},\omega_o) = L_e(\boldsymbol{x},\omega_o) + \int_{\mathcal{S}^2} f_s(\boldsymbol{x},\omega_i \to \omega_o) L_o(\boldsymbol{x}_{\mathcal{M}}(\boldsymbol{x},\omega_i), -\omega_i) d\sigma_{\boldsymbol{x}}^{\perp}(\omega_i) \tag{4.4.3}$$

## 4.5 解算子 (solution operator)

我们可以把解算子写为逆的形式：

$$(\mathbf{I}-\mathbf{T})L = L_e \tag{4.5.1}$$

$$\Longrightarrow L = (\mathbf{I}-\mathbf{T})^{-1} L_e \tag{4.5.2}$$

$$\Longrightarrow \mathbf{S} = (\mathbf{I}-\mathbf{T})^{-1} \tag{4.5.3}$$

$$L = \mathbf{S} L_e \tag{4.5.4}$$

当 $\mathbf{T}$ 的标准算子范数 (standard operator norm)$\|\mathbf{T}\|$ 满足 $\|\mathbf{T}\| < 1$ 时（我们后面再去证明），$\mathbf{I}-\mathbf{T}$ 就是可逆的。标准算子范数：

$$\|\mathbf{T}\| = \sup_{\|f\|\le 1} \|\mathbf{T}f\| \tag{4.5.5}$$

由于 $\|\mathbf{T}\| < 1$，就可以把逆写为 Neumann 序列：

$$\mathbf{S} = (\mathbf{I}-\mathbf{T})^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{T}^i = \mathbf{I} + \mathbf{T} + \mathbf{T}^2 + \cdots \tag{4.5.6}$$

我们令 $L = \mathbf{S}L_e$ 代入，得到：

$$L = L_e + \mathbf{T}L_e + \mathbf{T}^2 L_e + \cdots \tag{4.5.7}$$

这样看起来就非常清晰易懂了。

现在的问题是，$\|\mathbf{T}\| < 1$ 是否成立。在 [2] 中给出了证明，这里简单列一下：

$$1 \le p \le \infty \Longrightarrow \|\mathbf{G}\|_p \le 1 \tag{4.5.8}$$

$$\|\mathbf{K}\|_p \le 1 \quad For\ symmetric\ and\ energy-conserving\ scene \tag{4.5.9}$$

$$\|\mathbf{T}\|_p = \|\mathbf{KG}\|_p \le \|\mathbf{K}\|_p \|\mathbf{G}\|_p < 1 \tag{4.5.10}$$

对于上式中间第二条，由于场景中没有表面会完美反射，所以 $\|\mathbf{K}\|_p < 1$。

对于一些同时包含了穿透作用和反射的情况来说，事情就变得更复杂了。不过，其实 $\|\mathbf{T}\| < 1$ 不是必要的，只要序列收敛即可，也就是说对于 $k \ge 1$，要满足 $\|\mathbf{T}^k\| < 1$。论文 [1] 中证明上面描述的 Neumann 序列在任何物理上合理的场景中都是正确的。

# 5. 重要性传输


| | | |
|---|---|---|
| 5.1 | 传感器 | 19 |
| 5.2 | 测量方程 | 19 |
| 5.3 | 伴随算子 (Adjoint operators) | 20 |
| 5.4 | 重要性传输 | 20 |
| 5.5 | 符号总结 | 21 |


本章从算子的角度描述一下传感和测量，然后描述重要性传输的算子。

## 5.1 传感器

光传输的目标是估计均衡辐射度 (equilibrium radiance) $L$ 的有限数量的测量 (measurements)。比如对于一张图像，每个测量就是一个像素值 $I_j$。如果算法计算的是有限元解 (finite-element solution)，则 $I_j$ 就是基函数的系数（每个基函数一个系数）。

每一个测量都可以认为是场景中放置的假想传感器的响应。例如，我们可以想象每个像素都是虚拟相机中的一小块胶片，并且像素值与其接收到的辐射功率成比例。当然，大多数时候相机和镜头系统都没有明确建模。

然而，对于任何给定的像素，仍然可以识别世界空间中对其值有贡献的光线集，并假设存在一个虚拟传感器，该传感器对这些光线的辐射做出响应。

对于定义在全部 $\mathcal{R}$ 空间的传感器，$W_e$ 设为发射重要性函数 ( exitant importance function)，因为被认为是发射重要性 (emitting importance)：

$$W_e(\boldsymbol{x}, \omega) = \frac{dS(\boldsymbol{x}, \omega)}{d\Phi(\boldsymbol{x}, \omega)} \tag{5.1.1}$$

其中，$S$ 表示传感器响应值（可能是电压、电流等）。

## 5.2 测量方程

我们进行一下积分：

$$dS(\boldsymbol{r}) = W_e(\boldsymbol{r})d\Phi(\boldsymbol{r}) = W_e(\boldsymbol{r})L_i(\boldsymbol{r})d\mu(\boldsymbol{r}) \tag{5.2.1}$$

对于所有的落到传感器上的入射光线，我们得到 Nicodemus 测量方程：

$$I = \left\langle W_e, L_i \right\rangle = \int_{\mathcal{R}} W_e(\boldsymbol{r})L_i(\boldsymbol{r})d\mu(\boldsymbol{r}) \tag{5.2.2}$$

上述测量方程需要一个入射函数 $L_i$，我们可以使用算子 $\mathbf{G}$ 来得到，这时传感器必须要建立在域 $\mathcal{M}$ 上（传感器完全透明，不会对光传输产生影响，只负责接收光）。所以测量方程现在的形式是：

$$I = \left\langle W_e, L_i \right\rangle = \left\langle W_e, \mathbf{G}L \right\rangle = \left\langle W_e, \mathbf{GS}L_e \right\rangle \tag{5.2.3}$$

## 5.3 伴随算子 (Adjoint operators)

了解光传输算法的一个重要的有用的工具是伴随算子。伴随算子可以让我们用多种方法来计算测量 (measurements)，这可以带来新的见解和渲染算法。

我们先说一些在实线性代数中的一些一般概念。对于一个算子 $\mathbf{H}$ 的伴随算子标记为 $\mathbf{H}^*$，定义为如下形式：

$$\left\langle \mathbf{H}^* f, g \right\rangle = \left\langle f, \mathbf{H}g \right\rangle \qquad for\ all\ f,g \tag{5.3.1}$$

如果 $\mathbf{H} = \mathbf{H}^*$，这个算子就是自伴随的。

我们应用一下自伴随算子：

$$I = \left\langle W_e, \mathbf{GS}L_e \right\rangle = \left\langle (\mathbf{GS})^* W_e, L_e \right\rangle \tag{5.3.2}$$

这表明可以通过传播重要性 (transporting importance) 来计算 $I$。我们需要明确得到算子 $(\mathbf{GS})^*$ 才能知道具体是什么情况。

首先，$\mathbf{G} = \mathbf{G}^*$ 是已知的，这是因为光都是从一个表面到另一个表面。然后，我们再回顾一下 $\mathbf{K}$ 算子，并得到 $\mathbf{K}^*$ 算子（论文 [1] 中有证明过程）：

$$(\mathbf{K}h)(\boldsymbol{x}, \omega_o) = \int_{\mathcal{S}^2} f_s(\boldsymbol{x}, \omega_i \to \omega_o) h(\boldsymbol{x}, \omega_i) d\sigma_{\boldsymbol{x}}^{\perp}(\omega_i) \tag{5.3.3}$$

$$(\mathbf{K}^*h)(\boldsymbol{x}, \omega_o) = \int_{\mathcal{S}^2} f_s^*(\boldsymbol{x}, \omega_i \to \omega_o) h(\boldsymbol{x}, \omega_i) d\sigma_{\boldsymbol{x}}^{\perp}(\omega_i) \tag{5.3.4}$$

$$use\ adjoint\ BSDF\ :\ f_s^*(\boldsymbol{x}, \omega_i \to \omega_o) = f_s(\boldsymbol{x}, \omega_o \to \omega_i) \tag{5.3.5}$$

如果我们设 $f_s$ 是对于全部 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}$ 都对称的 BSDF，则 $\mathbf{K} = \mathbf{K}^*$。所以最终得到 $\mathbf{GS}$ 是自伴随的：

$$(\mathbf{GS})^* = \mathbf{GS} \tag{5.3.6}$$

所以我们最终得到：

$$I = \left\langle W_e, \mathbf{GS}L_e \right\rangle = \left\langle \mathbf{GS}W_e, L_e \right\rangle \tag{5.3.7}$$

## 5.4 重要性传输

如果具有上述的测量对称性，即：

则适用于光传输 (light transport) 的任何算法也可用于重要传输 (importance transport)。在这两种情况下，概念 (concepts)、量 (quantities) 和方程之间存在着精确的对应关系。

在实际中，equilibrium importance function 通过 $W = \mathbf{S}W_e$ 来得到，这满足重要性传输方程 (importance transport equation)：

$$W = W_e + \mathbf{T}W \tag{5.4.1}$$

应用 $W_i = \mathbf{G}W_o$ 得到入射重要性，就可以重写测量方程：

$$I = \left\langle W_e, L_i \right\rangle \quad or \quad I =< W_i, L_e > \tag{5.4.2}$$

如果场景中包含非对称 BSDF，那么 $\mathbf{K} \neq \mathbf{K}^*$，这并不影响光传输算子，我们设此时 $\mathbf{T}_L = \mathbf{KG}$。而重要性传输算子为 $\mathbf{T}_W = \mathbf{K}^*\mathbf{G}$。这表示一般来说，光和重要性可以遵循不同的传输方程。

此外，我们还没有考虑 transport operators 的相应入射量 $L_i$ 和 $W_i$。这导致了计算测量的多种可能性，所有这些都具有不同的传输方程。幸运的是，所有这些方程都具有相同的一般结构，如下一节，在符号总结中会进行描述。

## 5.5 符号总结

一共有四个基本的传输量 $L_o$，$L_i$，$W_o$ 和 $W_i$，分别表示外射辐射度、内射辐射度、外射重要性和内射重要性：

$$L_i = \mathbf{G}L_o \qquad W_i = \mathbf{G}W_o \tag{5.5.1}$$

$$L_o = \mathbf{K}L_i \qquad W_o = \mathbf{K}^*W_i \tag{5.5.2}$$

注意 $\mathbf{K}$ 和 $\mathbf{K}^*$ 的不同之处仅在 $\omega_i$ 和 $\omega_o$ 的顺序。

我们可以得到不同的光传输算子（我们用 $\mathbf{T}_X$ 中的 $X$ 来表示 $L_i$、$L_o$、$W_i$ 和 $W_o$ 中的任意一个）：

| | 出射 (Exitant) | 入射 (Incident) |
|---|---|---|
| Light | $\mathbf{T}_{L_o} = \mathbf{KG}$ | $\mathbf{T}_{L_i} = \mathbf{GK}$ |
| Importance | $\mathbf{T}_{W_o} = \mathbf{K}^*\mathbf{G}$ | $\mathbf{T}_{W_i} = \mathbf{GK}^*$ |

为了解这些量的均衡值 (equilibrium value)，可以使用传输方程：

$$X = X_e + \mathbf{T}_X X \tag{5.5.3}$$

其中 $X_e$ 是给定 $X$ 的发射函数。这样就能得到 $X = \mathbf{S}_X X_e$。

所以测量 $I$ 就可以使用下面任意表达式来进行计算：

$$I = \left\langle W_e, L_i \right\rangle = \left\langle W_i, L_e \right\rangle \tag{5.5.4}$$

$$= \left\langle W_{e,i}, L_o \right\rangle = \left\langle W_o, L_{e,i} \right\rangle \tag{5.5.5}$$

为了应用这些方程，我们需要初始化给定的两个发射函数，一个描述了发射辐射度 (emitted radiance)，一个描述了发射重要性 (emitted importance)（也就是传感器响应）。

到这里，关于符号描述的内容就基本结束了。虽然这些内容一般都出现在比较老的渲染论文里，但它仍然能够给我们很多启发。鉴于本人对泛函的内容暂时了解也并不很深，所以也大致只能感受一二。但最重要的两个形象的概念我们应该去铭记：

- **GK** 作用于入射辐射度，得到的是入射辐射度。
- **KG** 作用于出射辐射度，得到的是出射辐射度。

这种分析思路应该反复去阅读和思考，才能理解的更清楚。

# Bibliography


[1] E. Veach, Robust Monte Carlo Methods for Light Transport Simulation, Ph.D. thesis, Stanford University, 1997.

[2] Arvo. J, Analytic Methods for Simulated Light Transport, Ph.D. thesis, Yale University, 1995.