卷积：离散时间与连续时间

Dezeming Family

2021 年 12 月 13 日

DezemingFamily 系列书和小册子因为是电子书，所以可以很方便地进行修改和重新发布。如果您获得了 DezemingFamily 的系列书，可以从我们的网站 [https://dezeming.top/] 找到最新版。对书的内容建议和出现的错误欢迎在网站留言。

20211214：完成第一版。

目录

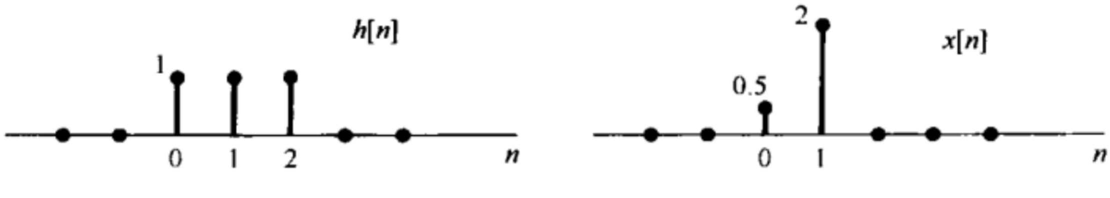
一 卷积的直观理解

一般而言，卷积是作为系统响应而存在的，离开了系统它也就失去了存在的意义。

直观理解卷积还得依靠离散情况，卷积的公式是：

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] \tag{一.1}$$

我们以下面的系统为例：

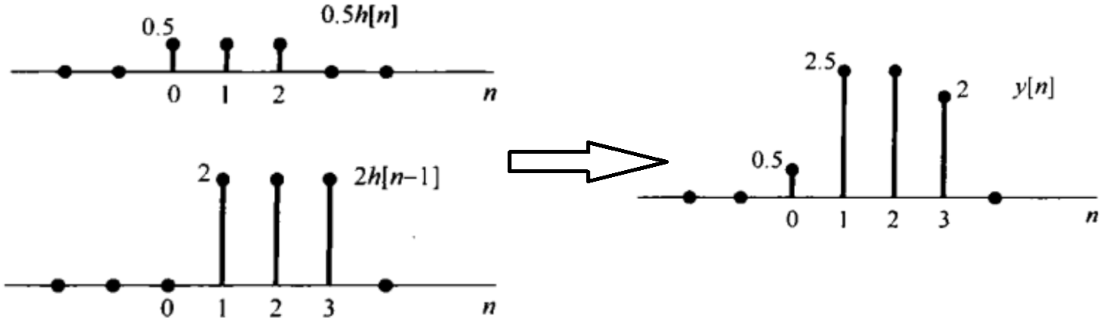


1 1 方法一

每秒往河里投石头，每投一个，就会泛起水波纹。最后卷积的结果就是水波纹之间相互叠加。

$$y[n] = x[0]h[n-0] + x[1]h[n-1] \tag{一.2}$$

图示为：



1 2 方法二

反转再求和，就比较难理解了。我们还是用水波纹来理解，我们忽略投石头这个系统是一个因果系统（后面会说明）。

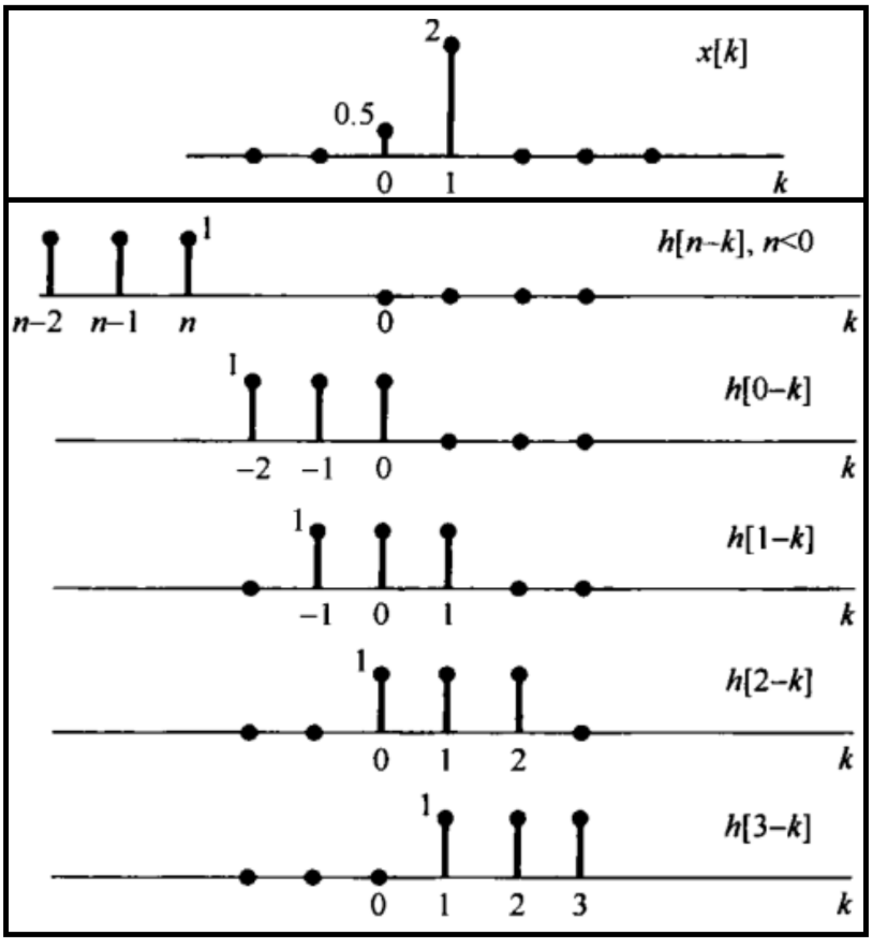
某一个时刻，你观察到水的波浪力度是 s，你想知道这个波浪强度是怎么组成的。

设当前坐标是 0。首先当前时刻的水波纹肯定构成了当前波浪力度，即 $s+=x[0]h[0]$。

上一秒投的石头，已经过去了一秒，所以当前的响应是 $h[1]$，即构成当前水波纹强度的量为 $s+=x[-1]h[1]$。

上上一秒的石头，已经过去了两秒，所以当前的响应是 $h[2]$，即两秒前投的石头构成当前水波纹强度的量为 $s+=x[-2]h[2]$。

未来，即下一秒投的石头，对现在也是有影响的（忽略因果性），对现在的影响是 $h[-1]$，即未来的下一秒投的石头构成当前水波纹强度的量为 $s+=x[-1]h[1]$。



二　卷积积分

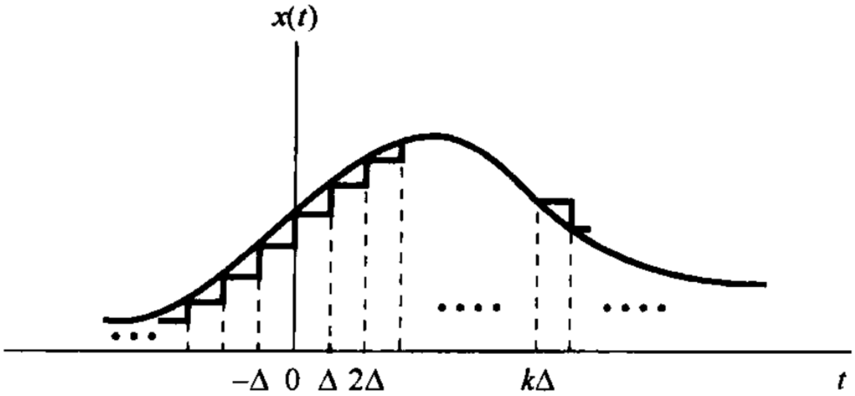
卷积的积分并不是很容易理解（尽管公式很简单，但是推导方法完全理解并不容易）。但我认为，卷积作为最基础最重要的信号系统理论，是值得花一些时间去推导和理解的。我们先从最简单的单位冲激的卷积开始，然后过渡到系统卷积。

2 1　用单位冲激表示连续时间信号

定义：

$$\delta_\Delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & 0 \le t < \Delta \\ 0, & otherwise \end{cases} \tag{二.1}$$

我们把一个信号用矩形来近似：



在第 $[k\Delta, (k+1)\Delta]$ 区间里，近似值是 $x(k\Delta)$，也可以表示为：

$$x(k\Delta)\delta_\Delta(t - k\Delta)\Delta \tag{二.2}$$

于是我们可以把整个近似的信号写为：

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\delta_\Delta(t - k\Delta)\Delta \tag{二.3}$$

随着 $\Delta \to 0$：

$$\lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\delta_\Delta(t - k\Delta)\Delta = x(t) \tag{二.4}$$

当 $\Delta \to 0$ 时，$x(t)$ 就是位于 $x(\tau)\delta_\Delta(t-\tau)$ 下的面积。且注意，$\Delta \to 0$ 时，$\delta_\Delta(t)$ 就是单位冲激函数 $\delta(t)$，所以：

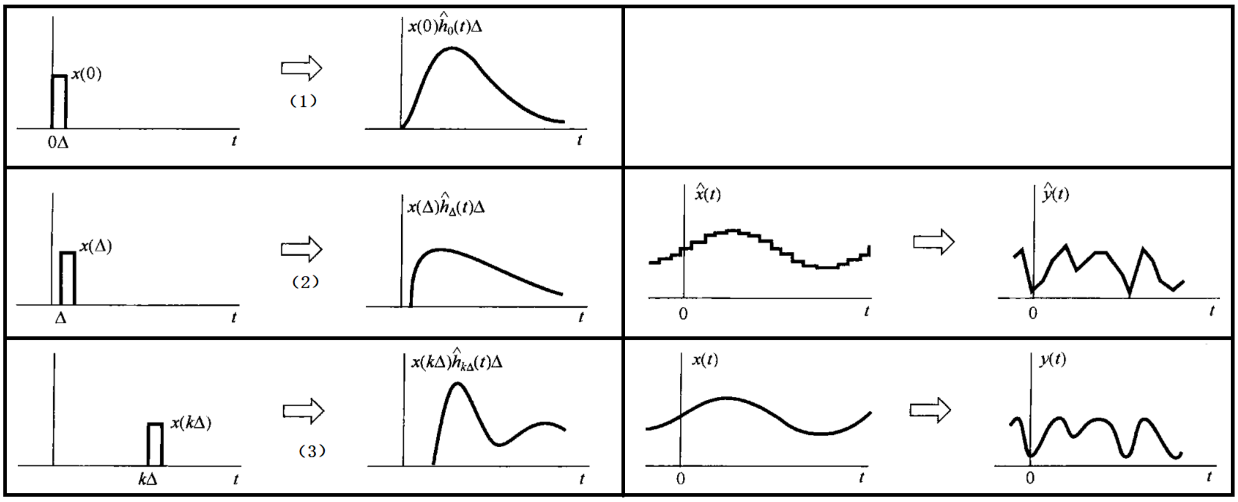
$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \tag{二.5}$$

2 2　线性时不变系统的卷积积分表示

我们令 $\hat{h}_{k\Delta}(t)$ 为一个 LTI 系统对输入 $\delta_\Delta(t - k\Delta)$ 的响应。

$$\hat{y}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\hat{h}_{k\Delta}(t)\Delta \tag{二.6}$$

示意图如下：



当 $\Delta \to 0$ 时：

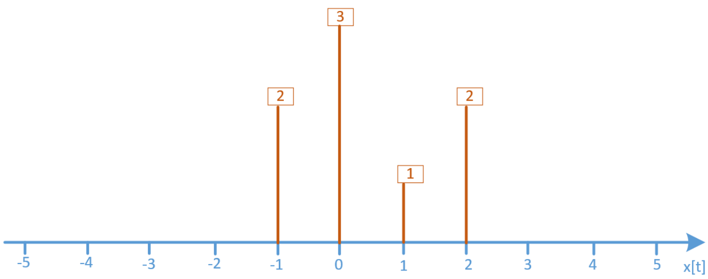
$$y(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\hat{h}_{k\Delta}(t)\Delta \tag{二.7}$$

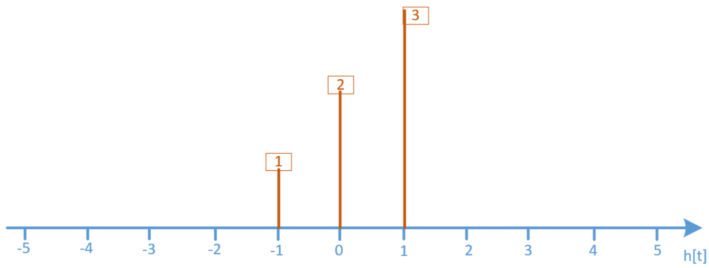
写为一个积分的形式，就是：

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \tag{二.8}$$

三　离散信号卷积举例

由于离散和连续的情况在例子中差别不是很大，我们仅以离散信号的卷积为例。
我们以下面的信号为例：

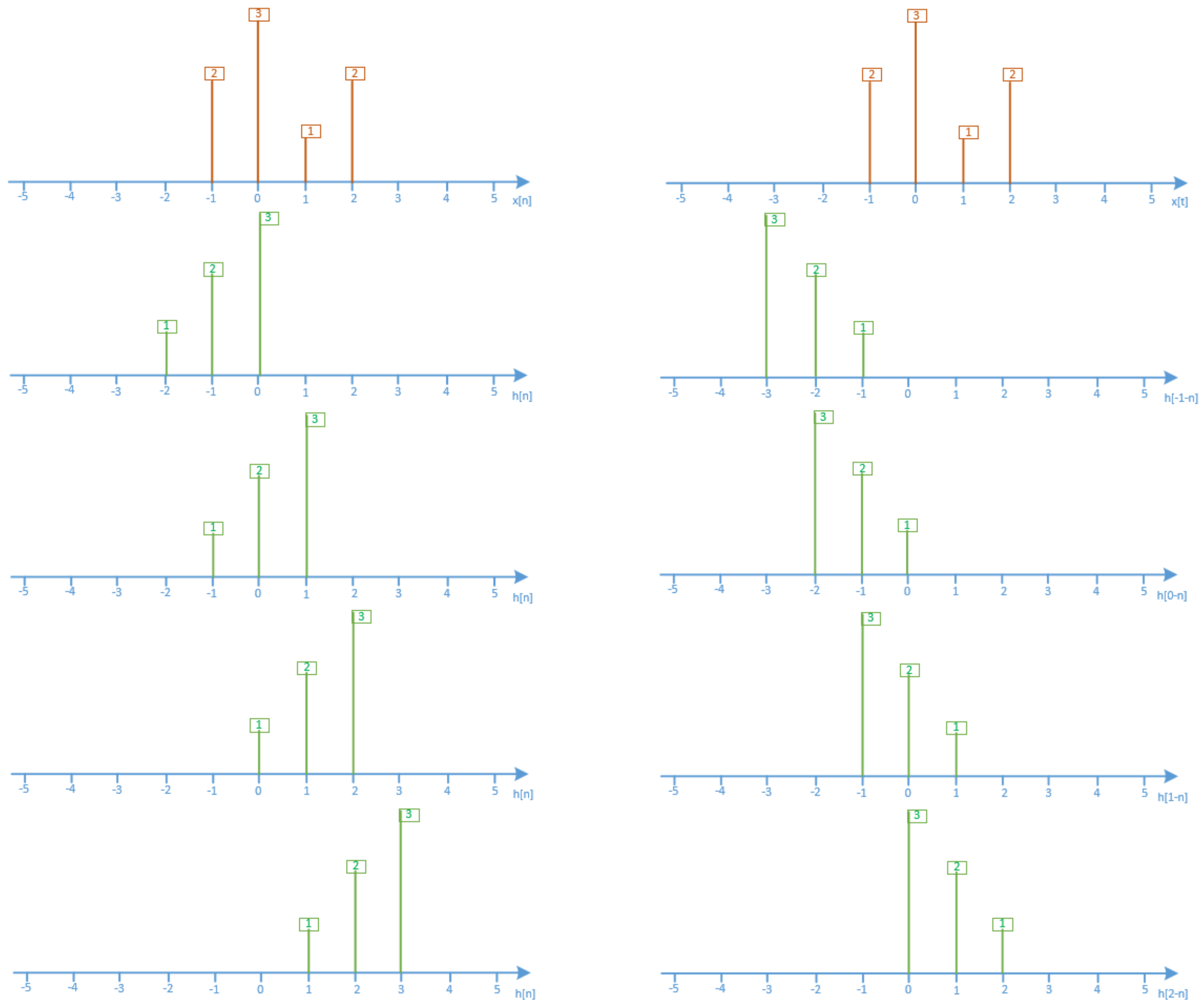




卷积公式如下：

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] \tag{三.1}$$

卷积的图示如下：



左半部分表示的是激励过程，是卷积的正常理解（第一节的方法一）。右半部分是化为公式以后的过程，代表反转求和。这里不再赘述，对比左右的两个图分析一下，就能加深理解。

参考文献

[1] Signals & Systems Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, with S. Hamid Nawab. Prentice Hall, 2013.

[2] Oppenheim, Alan V., and Ronald W. Schafer. Digital Signal Processing:(by) Alan V. Oppenheim (and) Ronald W. Schafer. Prentice-Hall, 2013.