滤波基础

Dezeming Family

2021 年 12 月 11 日

DezemingFamily 系列书和小册子因为是电子书，所以可以很方便地进行修改和重新发布。如果您获得了 DezemingFamily 的系列书，可以从我们的网站 [https://dezeming.top/] 找到最新版。对书的内容建议和出现的错误欢迎在网站留言。

20211212：完成第一版。

目录

一 滤波基础 **1**

二 阶跃信号响应 **2**

三 滤波的例子 **2**

参考文献 **3**

一　滤波基础

连续信号的卷积与傅里叶变换的关系：

$$y(t) = h(t) * x(t) \Longleftrightarrow Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega) \tag{一.1}$$

离散信号的卷积与傅里叶变换的关系：

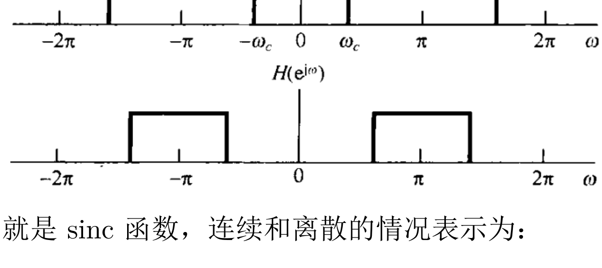
$$y[n] = x[n] * h[n] \tag{一.2}$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) \tag{一.3}$$

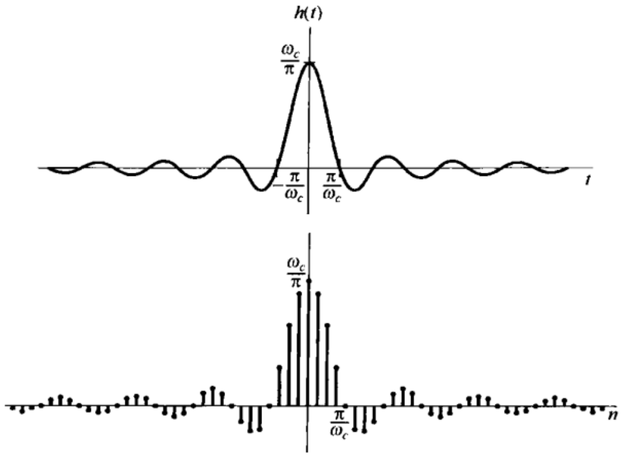
对于连续非周期信号，频谱 ω 的范围是 $(-\infty, \infty)$，并没有周期性特征。对于离散非周期信号，DTFT 频谱 ω 以 2π 为周期不断循环。

连续非周期信号的选择性滤波很简单，想实现高通滤波，就把低频部分去除。想实现低通滤波，就把高频部分去除。

而离散非周期信号，要注意低频部分在 π 的偶数倍附近，而高频在 π 的奇数倍附近（这是因为 $e^{j\omega}$ 具有周期性，大家回顾一下傅里叶变换的积分过程就会很清楚了）：

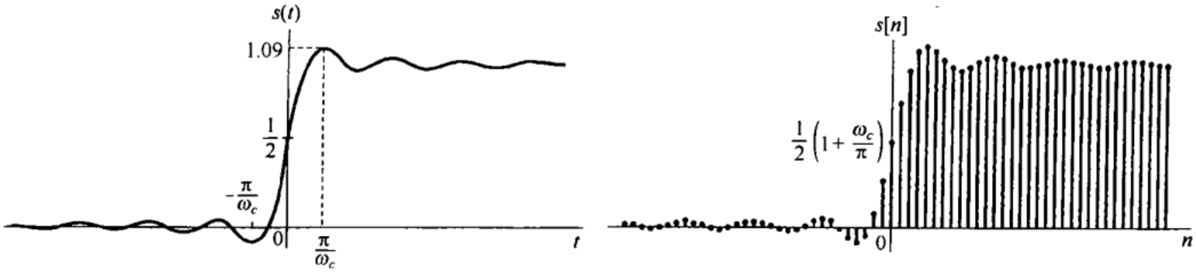


低通滤波器的时域信号就是 sinc 函数，连续和离散的情况表示为：



二　阶跃信号响应

如果把一个理想滤波器作用到阶跃信号上，你会发现得到的结果会出现震荡：



因为阶跃信号可以理解为是一个会出现极高频率的信号，滤波以后去掉最高频，低频部分就会出现一定的震荡性。例如 [1] 中的汽车减震系统的例子，我们不希望汽车从台阶下去之后会一直晃来晃去的，因此简单的低通滤波并不合适。

三　滤波的例子

准确来说，本节讲解的滤波器是属于频率成形滤波器，它是为了改变频率中某一部分的大小，而不是为了滤除某一部分（当然也有可能滤除某一部分）。

考虑某个系统：

$$y[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x[n-1]) \tag{三.1}$$

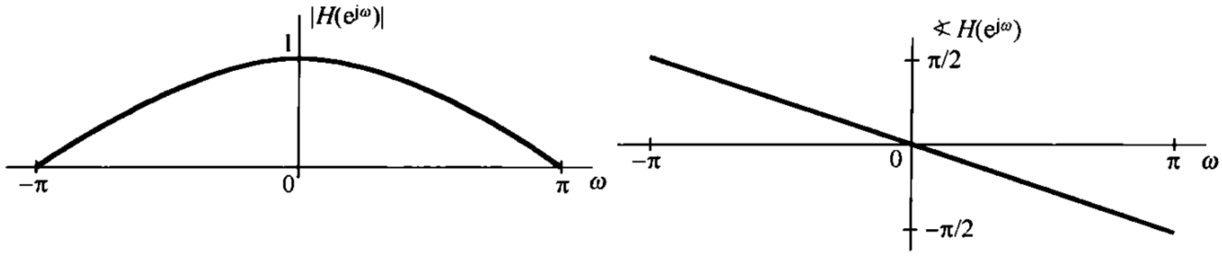
我们可以看到，这个系统会将相邻两个值相加以后取平均。从感觉上，我们可以感受到它会对高频信号有一定的滤除作用（平均滤波器），我们可以知道它的系统响应函数为：

$$h[n] = \frac{1}{2}(\delta[n] + \delta[n-1]) \tag{三.2}$$

该系统的频率响应是：

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[1 + e^{-j\omega}] \tag{三.3}$$

相位和幅角表示如下：



可以看到，低频段部分在频率为 0 的附近，高频段在 $\pm\pi$ 附近（注意离散系统频谱是周期函数，我们只关注 $[-\pi, \pi]$ 区间内即可）。也就是说，它确实具有低通效果。

对于低频信号，比如常数信号，$x[n] = C$，输出就是常数 $y[n] = C$，即不变。

对于高频信号，例如 $x[n] = Ce^{j\pi n}$，$H(e^{j\pi}) = 0$，所以输出 $y[n] = 0$。最后，注意 $e^{j\pi n} = -e^{j\pi(n+1)}$，这也是对于为什么 $y[n] = 0$ 最直观的解释，不过对于这种相邻点之间一正一负的信号来说，不就是离散信号中频率最高的信号吗？

参考文献

[1] Signals & Systems Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, with S. Hamid Nawab. Prentice Hall, 1997.

[2] Oppenheim, Alan V., and Ronald W. Schafer. Digital Signal Processing:(by) Alan V. Oppenheim (and) Ronald W. Schafer. Prentice-Hall, 1975.