离散时间信号采样

Dezeming Family

2021 年 12 月 17 日

DezemingFamily 系列书和小册子因为是电子书，所以可以很方便地进行修改和重新发布。如果您获得了 DezemingFamily 的系列书，可以从我们的网站 [https://dezeming.top/] 找到最新版。对书的内容建议和出现的错误欢迎在网站留言。

目录

一 脉冲串采样

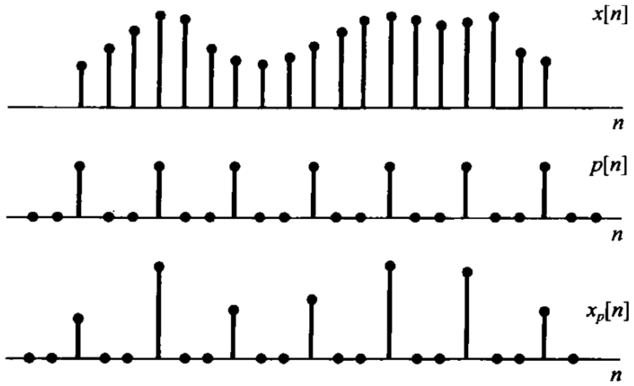
对原始离散信号 $x[n]$ 的采样可以得到：

$$x_p[n] = \begin{cases} x[n], & N\ is\ an\ integral\ multiple\ of\ n \\ 0, & otherwise \end{cases} \tag{一.1}$$

于是，令：

$$x_p[n] = x[n]p[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[kN]\delta[n-kN] \tag{一.2}$$

示意图如下：



求一下频域表示，设 $\omega_s=\frac{2\pi}{N}$：

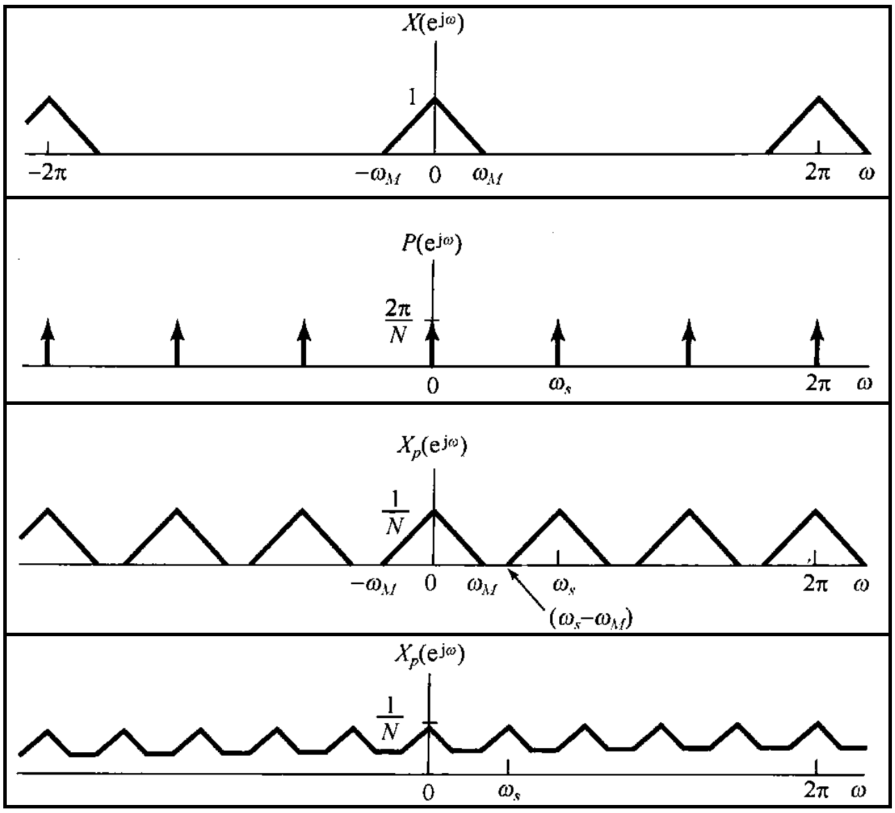
$$X_p(e^{j\omega})=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}P(e^{j\theta})X(e^{j(\omega-\theta)})d\theta \tag{一.3}$$

$$p[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta[n-kN]\Longleftrightarrow P(e^{j\omega})=\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-k\omega_s) \tag{一.4}$$

$$X_p(e^{j\omega})=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X\left(e^{j(\omega-k\omega_s)}\right) \tag{一.5}$$

采样以后的频谱就是 $X_p(e^{j\omega})$，

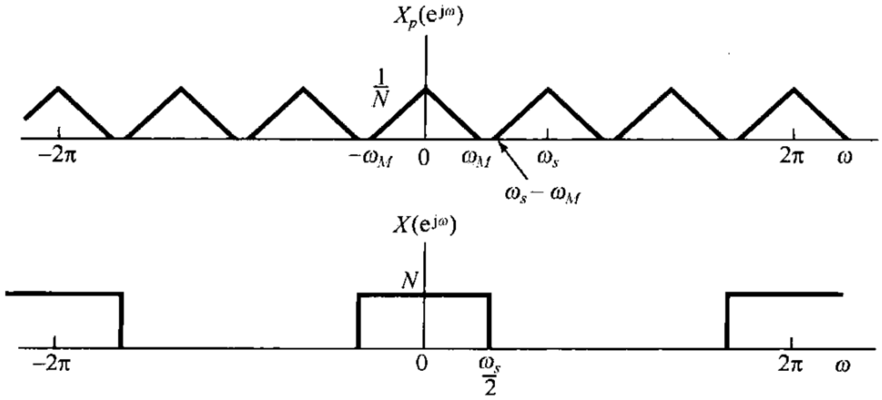
示意图如下：



当 $(\omega_s-\omega_M)>\omega_M$，即 $\omega_s>2\omega_M$ 时，没有频谱的混叠。否则，频谱的混叠就产生了。注意，如果某个离散信号的频谱在 $[-\pi,\pi]$ 之间都有值，则说明这个信号不能被降采样之后完全恢复。

二　信号的恢复

当满足 $\omega_s>2\omega_M$ 时，我们就可以重建信号，



对于带宽在 $[-\omega_c,\omega_c]$ 之间的理想低通滤波器，则有：

$$h[n]=\frac{N\omega_c}{\pi}\frac{\sin\omega_c n}{\omega_c n} \tag{二.1}$$

重建的序列就是：

$$x_r[n]=x_p[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[kN]\frac{N\omega_c}{\pi}\frac{\sin\omega_c(n-kN)}{\omega_c(n-kN)} \tag{二.2}$$

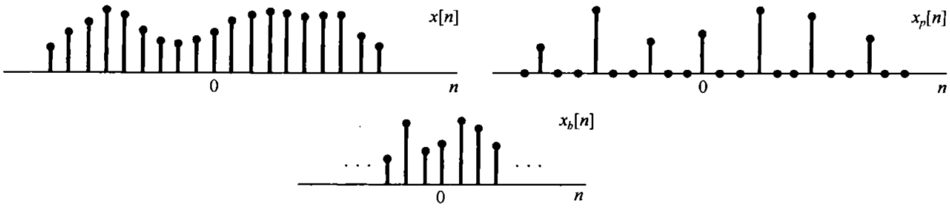
当然，也可以使用近似的低通滤波器，类似于连续时间信号的零阶保持和一阶保持。

三　实际应用抽取与内插

在实际传输中，对比原始信号 $x[n]$，$x_p[n]$ 信号会有一大堆 0，这是我们不希望看到的，所以会将信号给压缩：

$$x_b[n]=x_p[nN]=x[nN] \tag{三.1}$$

这个过程就是抽取，示意图如下：



我们希望得到 $x_b[n]$ 的傅里叶变换 $X_b(e^{j\omega})$ 与 $X(e^{j\omega})$ 之间的关系。先写一下 $x_b[n]$ 的傅里叶变换公式：

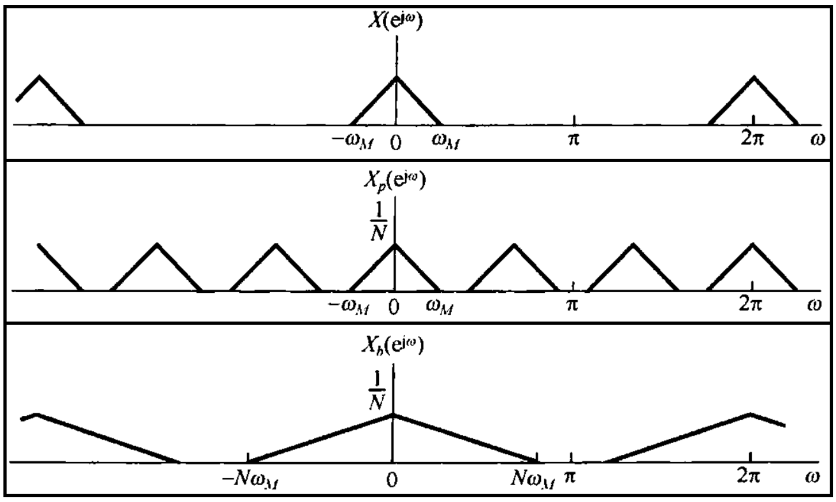
$$X_b(e^{j\omega})=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x_b[k]e^{-j\omega k}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x_p[kN]e^{-j\omega k} \tag{三.2}$$

$$let\ n=kN\Longrightarrow X_b(e^{j\omega})=\sum_{n=kN}x_p[n]e^{-j\omega\frac{n}{N}}\qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{三.3}$$

由于 n 不是 N 的整数倍时，$x_p[n]=0$，所以也可以写为：

$$X_b(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_p[n]e^{-j\omega\frac{n}{N}}=X_p(e^{j\frac{\omega}{N}}) \tag{三.4}$$

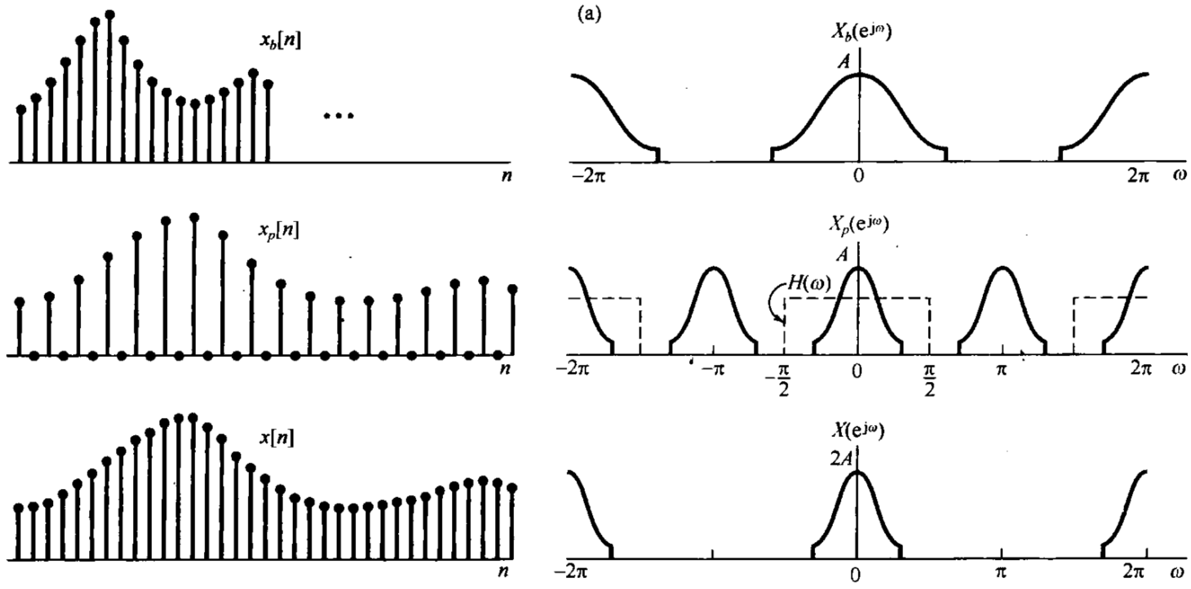
其实就相当于横轴进行了拉伸：



如果说，信号 $x[n]$ 是在连续信号 $x(t)$ 上采样得到的，那么抽取其实就是将采样率降低到原来的 $\frac{1}{N}$。如果抽取以后的信号不会引入混叠，说明原序列是被过采样的。

有时候在信号处理中，我们可以将得到的离散样本进行滤波，这样就可以继续进行抽取了，这个过程就叫做减采样。

有些时候，我们需要把序列转换到较高的采样率上，称为增采样。增采样可以先从 $x_b[n]$ 恢复到 $x_p[n]$，然后再从 $x_p[n]$ 恢复出 $x[n]$，过程与步骤可以参考下图：



四　混叠

当 $\omega_s < 2\omega_M$ 时，就无法重建出原始信号。但是，类似于连续时间的采样，使用理想低通滤波器则可以保证两个序列 $x_r[n]$ 和 $x[n]$ 在采样周期的整数倍点上总是相等的：

$$x_r[kN] = x[kN] \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{四.1}$$

取 $\omega_c = \frac{1}{2}\omega_s$：

$$x_r[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[kN] \frac{\omega_c N}{\pi} \frac{\sin(\omega_c(n-kN))}{\omega_c(n-kN)} \tag{四.2}$$

$$\omega_c = \frac{1}{2}\omega_s = \frac{1}{2}\frac{2\pi}{N} = \frac{\pi}{N} \tag{四.3}$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[kN] \frac{\sin\left[\frac{\pi}{N}(n-kN)\right]}{\frac{\pi}{N}(n-kN)} \tag{四.4}$$

我们知道：

$$\frac{\sin\left[\frac{\pi}{N}(n-kN)\right]}{\frac{\pi}{N}(n-kN)} = \begin{cases} 1, & n = kN \\ 0, & n \neq kN \end{cases} \tag{四.5}$$

也就是说：

$$x_r[kN] = x[kN] \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{四.6}$$

五　总结

采样定理，尤其是在离散信号上的拓展，是信号与系统中最重要的内容之一，在样条插值、小波分析等领域，也会大量借鉴这里的方法和基本思想。

把采样定理里面的内容都研究透彻，对信号分析会有相当大的帮助。

参考文献

[1] Signals and Systems Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, with S. Hamid Nawab. Prentice Hall, 2013.