线性常系数微分、差分方程描述的系统

Dezeming Family

2021 年 12 月 14 日

DezemingFamily 系列书和小册子因为是电子书，所以可以很方便地进行修改和重新发布。如果您获得了 DezemingFamily 的系列书，可以从我们的网站 [https://dezeming.top/] 找到最新版。对书的内容建议和出现的错误欢迎在网站留言。

目录

一 线性常系数微分方程和线性常系数差分方程

很多人不喜欢、或者觉得微分方程没什么用，其实在很多专业确实是如此。但是在控制理论、系统优化等专业方向里，随处可见的常系数微分方程证明了它的价值。在信号与系统中，可以说微分方程占据了相当大的分量，如果忽略了它，在实际的分析中，尤其是通信工程、高频无线电等领域都会遇到无数的障碍。

1 1 线性常系数微分方程

一阶微分方程都可以表示如下：

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = x(t) \tag{一.1}$$

我们知道它由一个齐次解和一个特解构成。齐次解是下面微分方程的解：

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = 0 \tag{一.2}$$

特解则是对应于原式的解。我们把齐次解描述为“系统的自然响应”。

N 阶常系数微分方程可以写为：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \tag{一.3}$$

微分方程不能完全用输入来表征输出，需要加入一些附加条件。比如对于因果系统，就需要加入“初始松弛条件”，我们以下面的方程为例：

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t) = 8e^{3t}u(t) \tag{一.4}$$

$$\Longrightarrow y(t) = Ae^{-2t} + \frac{8}{5}e^{3t} \qquad t > 0 \tag{一.5}$$

初始松弛条件就是如果 $t < t_0$ 时 $x(t) = 0$，则 $t < t_0$ 时 $y(t) = 0$。因此将 $y(0) = 0$ 代入，就能够得到：

$$A = -\frac{8}{5} \tag{一.6}$$

初始松弛条件可以使得一个线性常系数微分方程描述的系统变为时不变系统。就好比一个电路，只要里面的电容和电阻不随时间改变，那么当你接上电源之前，电容上的电压就是 0；当你接上电源以后，电压才开始变化。只要初始状态下，没有接电源时电容没有电压，则不管什么时候接上电源，电容上的电压变化都是一致的（时不变性）。

1 2　线性常系数差分方程

线性常系数差分方程表示如下：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \tag{一.7}$$

我们改写一下形式：

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left\{ \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] \right\} \tag{一.8}$$

这种形式的方程叫做递归方程，因为它需要输入和以前的输出来求当前的输出，这个过程是不断递归回去的。

我们举个例子来感受一下：

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] \tag{一.9}$$

$$\Longrightarrow y[n] = x[n] + \frac{1}{2}y[n-1] \tag{一.10}$$

我们加入初始松弛条件，并考虑一个输入：

$$x[n] = K\delta[n] \tag{一.11}$$

然后就可以开始递归计算了：

$$y[0] = x[0] + \frac{1}{2}y[-1] = K \tag{一.12}$$

$$y[1] = x[1] + \frac{1}{2}y[0] = \frac{1}{2}K \tag{一.13}$$

$$y[2] = x[2] + \frac{1}{2}y[1] = \left(\frac{1}{2}\right)^2 K \qquad \cdots \tag{一.14}$$

$$y[n] = x[n] + \frac{1}{2}y[n-1] = \left(\frac{1}{2}\right)^n K \tag{一.15}$$

这个系统的单位脉冲响应就是：

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n K \cdot u[n] \tag{一.16}$$

这类系统当给定一个脉冲后，有无限长的单位脉冲响应，因此是无限脉冲响应（infinite impulse response, IIR）系统。

我们再举一个有限脉冲响应 FIR 系统的例子。令上面的差分方程中的 $N = 0$，就能得到：

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} (\frac{b_k}{a_0}) x[n-k] \tag{一.17}$$

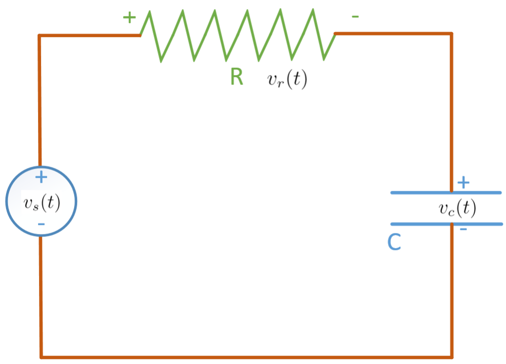
这个系统的单位脉冲响应如下，可以看到其实上式就是卷积和的表示形式：

$$h[n] = \begin{cases} \frac{b_n}{a_0}, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & otherwise \end{cases} \tag{一.18}$$

二　微分、差分方程描述的滤波器

2 1　微分方程描述的滤波器

微分方程描述的滤波器多见于 RC 高通和低通滤波器。设电源输入为 $v_s(t)$，电容两段的电压为 $v_c(t)$，电阻两端的电压是 $v_r(t)$，电路图如下：



输出电压与输入电压之间的关系是：

$$RC\frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = v_s(t) \tag{二.1}$$

$$RC\frac{dv_r(t)}{dt} + v_r(t) = RC\frac{dv_s(t)}{dt} \tag{二.2}$$

设系统满足初始松弛条件，也就是说这是 LTI 系统，根据频率响应，如果输入是 $v_s(t) = e^{j\omega t}$，输出就一定是 $v_c(t) = H(j\omega)e^{j\omega t}$，$v_r(t) = G(j\omega)e^{j\omega t}$。

代入求解就能得到：

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + RCj\omega} \tag{二.3}$$

$$G(j\omega) = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} \tag{二.4}$$

分析一下模和相位，就能感受到，电容两段输出的电压相当于低通滤波器，电阻两端的电压相当于高通滤波器。

2 2　差分方程描述的滤波器

设某一个差分方程描述的系统为：

$$y[n] - ay[n-1] = x[n] \tag{二.5}$$

当输入是 $e^{j\omega n}$ 时，输出是 $y[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$，其中 $H(e^{j\omega})$ 是该系统的频率响应，代入得到：

$$H(e^{j\omega})e^{j\omega n} - aH(e^{j\omega})e^{j\omega(n-1)} = e^{j\omega n} \tag{二.6}$$

$$\Longrightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \tag{二.7}$$

可以看出上面的系统频率响应就是一个周期函数，周期为 2π。

上面的滤波器是递归时间滤波器，下面再考虑一个非递归滤波器。对于一个三点移动平均滤波器来说：

$$y[n] = \frac{1}{3}(x[n-1] + x[n] + x[n+1]) \tag{二.8}$$

得到单位脉冲响应：

$$h[n] = \frac{1}{3}(\delta[n+1] + \delta[n] + \delta[n-1]) \tag{二.9}$$

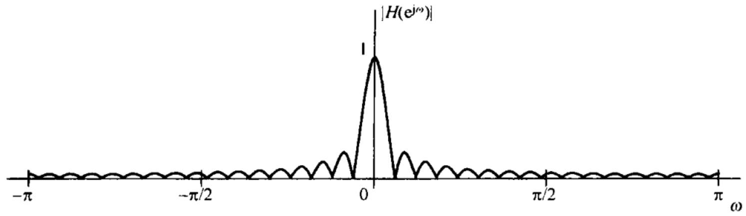
$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{3}[e^{j\omega} + 1 + e^{-j\omega}] = \frac{1}{3}(1 + 2\cos\omega) \tag{二.10}$$

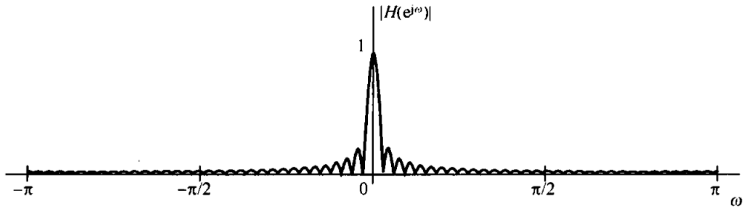
更一般的，我们考虑在 $N+M+1$ 个相邻点做平均：

$$y[n] = \frac{1}{N+M+1}\sum_{k=-N}^{M} x[n-k] \tag{二.11}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{N+M+1}\sum_{k=-N}^{M} e^{-j\omega k} \tag{二.12}$$

令 $M = N$，当它们分别是 16 和 32 时，频谱的模表示如下：





可以看到，邻域越大，就会呈现越好的低通特性。

而下面的一个系统：

$$y[n] = \frac{1}{2}\Big(x[n] - x[n-1]\Big) \tag{二.13}$$

$$\Longrightarrow h[n] = \frac{1}{2}\Big(\delta[n] - \delta[n-1]\Big) \tag{二.14}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[1 - e^{-j\omega}] = je^{j\omega/2}\sin(\omega/2) \tag{二.15}$$

这个滤波器就呈现出高通的作用。

三　线性常系数微分和差分方程描述的系统

本章我们会认识到频率分析对于微分、差分方程描述的系统是一个多么便利的工具。尤其是在高级微分、差分方程中，或许我们很难得到方程的解，但是我们可以很容易判断它对于输入信号是具有高通还是低通以及带通的作用。

3 1　线性常系数微分方程描述的系统

对于下面这个线性常系数微分方程描述的系统：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \tag{三.1}$$

我们取两边的傅里叶变换：

$$\mathcal{F}\Big\{\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k}\Big\} = \sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k Y(j\omega) = \mathcal{F}\Big\{\sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}\Big\} = \sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k X(j\omega) \tag{三.2}$$

因此就能得到：

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k} \tag{三.3}$$

然后我们还可以进一步再求出该系统的单位脉冲响应。

3 2 线性常系数差分方程描述的系统

对于线性常系数差分方程描述的系统：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \tag{三.4}$$

同理，两边取傅里叶变换，然后得到频率响应：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\omega} Y(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\omega} X(e^{j\omega}) \tag{三.5}$$

$$\Longrightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\omega}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\omega}} \tag{三.6}$$

四 总结

关于系统的频率分析还可以讲很多内容，尤其是在通信系统和控制论中。

线性常系数微分方程可以理解为是偏微分方程的一个入门版本，傅里叶在热传输的研究中，写出了《热的解析理论》，提出了三维空间的热传输方程，这就是一个偏微分方程，而偏微分方程的求解，则需要泛函分析、拓扑学、微分几何学等各种高阶的知识。现阶段，有不少数值求解分析工具，都是可以使用的。

总之，对于系统和方程的分析是一个非常重要的内容，这也是我认为在信号系统研究中不可或缺的一部分。

参考文献

[1] Signals & Systems Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, with S. Hamid Nawab. Prentice Hall, 1997.

[2] Oppenheim, Alan V., and Ronald W. Schafer. Digital Signal Processing:(by) Alan V. Oppenheim (and) Ronald W. Schafer. Prentice-Hall, 1975.