线性时不变系统的频率响应

Dezeming Family

2021 年 12 月 13 日

DezemingFamily 系列书和小册子因为是电子书，所以可以很方便地进行修改和重新发布。如果您获得了 DezemingFamily 的系列书，可以从我们的网站 [https://dezeming.top/] 找到最新版。对书的内容建议和出现的错误欢迎在网站留言。

目录

一 线性时不变系统与复指数信号

复指数信号和线性时不变系统（LTI）有一个很重要的性质，我们先看连续时间信号。

现在考虑一个连续时间 LTI 系统，它的单位冲激响应为 $h(t)$。对于输入 $x(t)$，其输出可以由卷积积分来确定输出，设输入为 $x(t)=e^{st}$（当然也可以是 0.8^{st}，用 e 时，随着 t 值的增大，模 $|e^{st}|$ 而且始终为 1），s 是复常数，则：

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau && (一.1)\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau && (一.2)\\
&= e^{st}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau && (一.3)\\
&= H(s)e^{st} && (一.4)
\end{aligned}
$$

注意，由于 s 是复常数，所以最后得到的 $H(s)$ 是一个常数。也就是说，输出是输入乘以一个常数。

再看一下离散的情况，设输入是 $x[n]=z^n$（z 可以是任何复数值），其中 z 为某一个复数，卷积和可以确定系统的输出为：

$$
\begin{aligned}
y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] && (一.5)\\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{n-k} = z^n\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{-k} && (一.6)\\
&= H(z)z^n && (一.7)
\end{aligned}
$$

也就是说，如果：

$$
x(t) = a_1e^{s_1t} + a_2e^{s_2t} + a_3e^{s_3t} \qquad (一.8)
$$

输出响应就是：

$$y(t) = a_1 H(s_1) e^{s_1 t} + a_2 H(s_2) e^{s_2 t} + a_3 H(s_3) e^{s_3 t} \tag{一.9}$$

二　频率响应

令 $s = j\omega$，$z = e^{j\omega}$，上一节得到的 $H(s)$ 和 $H(z)$ 就可以分别表示为：

$$H(s) = H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt \tag{二.1}$$

$$H(z) = H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] e^{-j\omega n} \tag{二.2}$$

在连续时间信号的前提下，考虑某个周期信号输入：

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \tag{二.3}$$

输出就是：

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \tag{二.4}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(jk\omega_0) \left[a_k e^{jk\omega_0 t} \right] \tag{二.5}$$

$y(t)$ 也是周期信号，且与 $x(t)$ 有着相同的基波频率。

在离散周期信号中，设输入：

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \tag{二.6}$$

输出就是：

$$y[n] = \sum_{k=<N>} a_k H(e^{jk\frac{2\pi}{N}}) e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \tag{二.7}$$

$$= \sum_{k=<N>} H(e^{jk\frac{2\pi}{N}}) \left[a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \right] \tag{二.8}$$

综上，我们称 $H(j\omega)$ 和 $H(e^{j\omega})$ 是系统的频率响应函数，我们可以看到，频率响应其实就是单位冲激响应的傅里叶变换：

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt \tag{二.9}$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] e^{-j\omega n} \tag{二.10}$$

参考文献

[1] 奥本海姆.《信号与系统》2013.1 电子工业出版社.