辐射传输方程的路径积分表示

DEZEMING FAMILY

DEZEMING

Copyright © 2021-12-21 Dezeming Family

Copying prohibited

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying and recording, or by any information storage or retrieval system, without the prior written permission of the publisher.

Art. No 0
ISBN 000–00–0000–00–0
Edition 0.0

Cover design by Dezeming Family

Published by Dezeming
Printed in China

目录

前言及简介

DezemingFamily 系列书和小册子因为是电子书，所以可以很方便地进行修改和重新发布。如果您获得了 *DezemingFamily* 的系列书，可以从我们的网站 *[https://dezeming.top/]* 找到最新版。对书的内容建议和出现的错误欢迎在网站留言。

0.1 本书前言

在表面模型之间的渲染方程可以写为路径积分形式（见《PBRT 系列 11-代码实战-路径追踪》）：

$$L(p_1 \to p_0) = L_e(p_1 \to p_0) + \int_A L_e(p_2 \to p_1) f(p_2 \to p_1 \to p_0) G(p_2 \leftrightarrow p_1) dA(p_2) \tag{0.1.1}$$

$$+ \int_A \int_A L_e(p_3 \to p_2) f(p_3 \to p_2 \to p_1) G(p_3 \leftrightarrow p_2) \tag{0.1.2}$$

$$\times f(p_2 \to p_1 \to p_0) G(p_2 \leftrightarrow p_1) dA(p_3) dA(p_2) + ... \tag{0.1.3}$$

$$P(\overline{p_n}) = \overbrace{\int_A \int_A \cdots \int_A}^{n-1} L_e(p_n \to p_{n-1}) \tag{0.1.4}$$

$$\times \left(\prod_{i=1}^{n-1} f(p_{i+1} \to p_i \to p_{i-1}) G(p_{i+1} \leftrightarrow p_i)\right) dA(p_2) \cdots dA(p_n) \tag{0.1.5}$$

$$= \overbrace{\int_A \int_A \cdots \int_A}^{n-1} L_e(p_n \to p_{n-1}) T(\overline{p_n}) dA(p_2) \cdots dA(p_n) \tag{0.1.6}$$

但是，路径积分还可以扩展到参与介质中，即辐射传输方程 LTE，这还需要一些推导方法。可是由于时代变迁，很多有用的原理推导不断被缩减和埋没，也没有专业的技术书籍来系统地描述和分析，尽管有很多相关的论文来提供学习，但是由于各个论文的描述会有区别，因此在学习的过程中会产生诸多不便。

本书的内容就是根据 [1] 提供的推导，给出更通俗易懂的解读。读者需要将《光传输的符号表示》一书覆盖的内容进行了解，尤其是关于 **GK** 和 **KG** 算子的含义。

1. 辐射传输方程的积分形式

本章会推导出辐射传输方程 *(radiative transfer equation)* 的积分形式

1.1 一些基本的定义

虽然我很想将里面的很多符号替换成自己更喜欢的方式，但是为了能够方便与原文 [1] 对比学习，所以还是保留了原文的符号。但我实在不是很喜欢原书的符号。

三维空间中的一个点（比如表面交点，或者介质空间中任意一个点）表示为 $\boldsymbol{x}$；ray 表示为 $(\boldsymbol{x},\omega)$，$\boldsymbol{x}$ 是原点，ω 是方向，$d\sigma_{\boldsymbol{x}}$ 表示在当前点 $\boldsymbol{x}$ 处的立体角，$\sigma_{\boldsymbol{x}}^{\perp}$ 表示在当前点 $\boldsymbol{x}$ 处的投影立体角 (含 cos 项)。

辐射传输方程就可以表示为：

$$(\omega\cdot\nabla)L(\boldsymbol{x},\omega)+\sigma_t(\boldsymbol{x})L(\boldsymbol{x},\omega)= \tag{1.1.1}$$

$$\sigma_s(\boldsymbol{x})\int_{S^2} f_p(\boldsymbol{x},\omega^{'}\to\omega)L(\boldsymbol{x},\omega^{'})d\sigma_{\boldsymbol{x}}(\omega^{'})+L_e(\boldsymbol{x},\omega) \tag{1.1.2}$$

$(\omega\cdot\nabla)$ 表示这里的变化率是与方向 ω 有关的。

上式右边表示发射和内散射项，我们假设方向 ω 被限制在一条直线方向上，将 $(\boldsymbol{x},\omega)$ 参数化为 (s)，我们把发射项和内散射项写为 $Z(s)$：

$$L'(s)+\sigma_t(s)L(s)=Z(s) \tag{1.1.3}$$

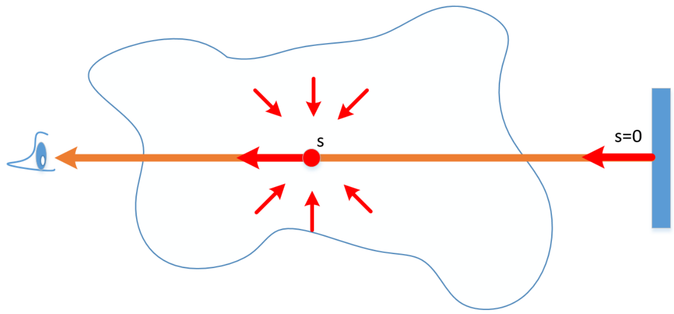
可以看到这是一个常微分方程，我们设 $s=0$ 处（介质外某一点）给一个初始条件，解得 $L(s)$（介质外的光沿着这条直线前进 s 以后的亮度）：

$$L(s)=e^{-\int_0^s\sigma_t(r)dr}\left[L(0)+\int_0^s e^{\int_0^t\sigma_t(r)dr}Z(t)dt\right] \tag{1.1.4}$$

$$=e^{-\int_0^s\sigma_t(r)dr}L(0)+e^{-\int_0^s\sigma_t(r)dr}\int_0^s e^{\int_0^t\sigma_t(r)dr}Z(t)dt \tag{1.1.5}$$

$$=e^{-\int_0^s\sigma_t(r)dr}L(0)+\int_0^s e^{-\int_t^s\sigma_t(r)dr}Z(t)dt \tag{1.1.6}$$

上式右边的第一项表示从介质外射入的光从 $s=0$ 处到达 s 处的衰减，第二项表示积累的内散射。



1.2 LTE 的完整形式

我们先把从介质外射入的光从 $s=0$ 处到达 s 处的衰减进行一下分析。

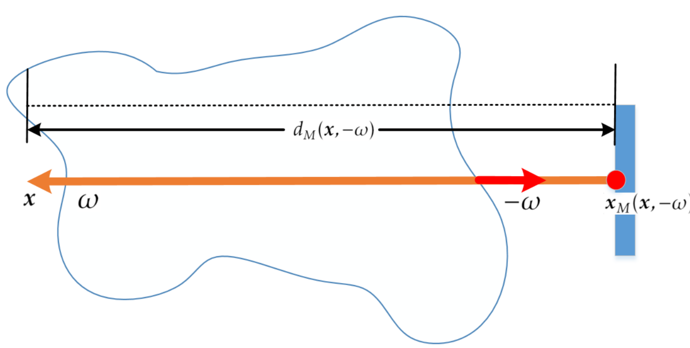
定义 $\tau(\boldsymbol{x} \leftrightarrow \boldsymbol{y})$：

$$\tau(\boldsymbol{x} \leftrightarrow \boldsymbol{y}) := e^{-\int_x^y \sigma_t(z)dz} \tag{1.2.1}$$

如果视线穿过体空间以后能够与某表面相交，就说明有外射光照入。定义 $\boldsymbol{x}_M(\boldsymbol{x},\omega) = \boldsymbol{x} + d_M(\boldsymbol{x},\omega)\omega$，表示在 $\boldsymbol{x}$ 沿着方向 ω 前进 d_M 距离以后的点（这个点应当是某个表面的交点）。我们把外射光达到 $\boldsymbol{x}$ 以后衰减的表示写下来：

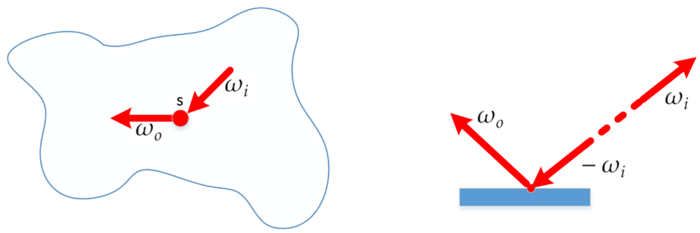
$$L_{reduced}(\boldsymbol{x},\omega) := \begin{cases} L_o(\boldsymbol{x}_M(\boldsymbol{x},-\omega),\omega)\tau(\boldsymbol{x}_M(\boldsymbol{x},-\omega) \leftrightarrow \boldsymbol{x}), & d_M(\boldsymbol{x},-\omega) < \infty \\ 0, & otherwise \end{cases} \tag{1.2.2}$$

示意图如下：



上面其实就是用 $L_{reduced}(\boldsymbol{x},\omega)$ 来表示自然光在体空间的衰减效果。

然而，在不同的场景里，符号一般是不同的：在体散射模型中，入射方向参数会指向散射位置的方向；而表面散射模型中，则是远离散射位置的方向。所以，在体渲染中，对于某个点，我们把光射向该点的方向设为 ω_i（而在表面散射模型中 ω_i 表示射入方向的反方向）：



所以，BSDF 函数一般都写作 $f_s(\boldsymbol{x},\omega' \to \omega)$，而相位函数一般则写作 $f_p(\boldsymbol{x},-\omega' \to \omega)$，注意里面的符号。

现在，我们给出完整的体渲染方程：

$$L_o(\boldsymbol{x},\omega) = L_{reduce}(\boldsymbol{x},\omega) + \int_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{x}_M(\boldsymbol{x},-\omega)} \tau(\boldsymbol{x} \leftrightarrow \boldsymbol{y})\left(\sigma_s(\boldsymbol{y}) \int_{S^2} f_p(\boldsymbol{y},-\omega' \to \omega) L_i(\boldsymbol{y},\omega') d\sigma_y + L_e(\boldsymbol{y},\omega)\right) d\boldsymbol{y} \tag{1.2.3}$$

这个体渲染方程和在《PBRT 系列 20-专业知识理论与代码实战-渲染概率与采样》中并没有任何不同，只是在符号表示上有所区别。

2. 更系统化的符号表示

本章对 LTE 方程做一些系统化的符号表示。

2.1 表面模型和体介质的散射

对于表面模型来说，渲染方程是：

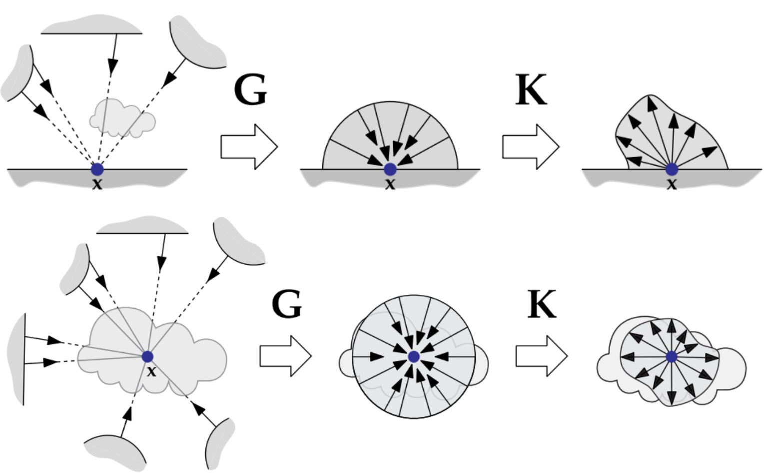
$$L_o(\boldsymbol{x},\omega)=\int_{S^2} f_s(\boldsymbol{x},\omega'\to\omega)L_i(\boldsymbol{x},\omega')d\sigma_{\boldsymbol{x}}^{\perp}(\omega')+L_e(\boldsymbol{x},\omega) \tag{2.1.1}$$

对于在参与介质中，体渲染方程是：

$$\begin{aligned}L_o(\boldsymbol{x},\omega)=&L_{reduce}(\boldsymbol{x},\omega)+\\&\int_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{x}_M(\boldsymbol{x},-\omega)}\tau(\boldsymbol{x}\leftrightarrow\boldsymbol{y})\Big(\sigma_s(\boldsymbol{y})\int_{S^2} f_p(\boldsymbol{y},-\omega'\to\omega)L_i(\boldsymbol{y},\omega')d\sigma_{\boldsymbol{y}}+L_e(\boldsymbol{y},\omega)\Big)d\boldsymbol{y}\end{aligned} \tag{2.1.2}$$

体光传输可以分为两个步骤：第一步是在表面或者介质中散射；第二步是传输和衰减。这两个步骤可以使用线性操作符和实现。

我们先给出图示，下图中上面表示操作符在表面的效果，下面表示操作符在介质的效果：



我们定义内散射操作符为 $\mathbf{K}$，它可以表示表面上的散射 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}$，也可以表示介质中的散射。内散射操作符的意义是，对于表面来说，它把入射方向的光转到出射方向（散射）；对于体空间内部来说，它把一个单位长度的入射方向的光转到出射方向（散射）。这里的 h 表示某种光。公式如下：

$$(\mathbf{K}h)(\boldsymbol{x},\omega) := \begin{cases} \int_{S^2} f_s(\boldsymbol{x},\omega' \to \omega)h(\boldsymbol{x},\omega')d\sigma_{\boldsymbol{x}}^{\perp}(\omega'), & \boldsymbol{x} \in \mathcal{M} \\ \sigma_s(\boldsymbol{x})\int_{S^2} f_p(\boldsymbol{x},-\omega' \to \omega)h(\boldsymbol{x},\omega')d\sigma_{\boldsymbol{x}}(\omega'), & otherwise \end{cases} \tag{2.1.3}$$

我们还需要定义一个传输操作符 $\mathbf{G}$ 来表示整个体空间的传输操作。它的意义是把单位长度的从体空间发出的和表面发出辐射度转到入射方向：

$$(\mathbf{G}h)(\boldsymbol{x},\omega) := \int_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{x}_{\mathcal{M}}(\boldsymbol{x},\omega)} \tau(\boldsymbol{x} \leftrightarrow \boldsymbol{y})h(\boldsymbol{y},-\omega)d\boldsymbol{y} \tag{2.1.4}$$

$$+\,\tau(\boldsymbol{x} \leftrightarrow \boldsymbol{x}_{\mathcal{M}}(\boldsymbol{x},\omega))h(\boldsymbol{x}_{\mathcal{M}}(\boldsymbol{x},\omega),-\omega) \tag{2.1.5}$$

我们可以考虑一下渲染方程和体渲染方程，来得到均衡方程 (equilibrium equation) 的形式：

$$L_i = \mathbf{G}(\mathbf{K}L_i + L_e) \tag{2.1.6}$$

我们回顾一下在《光传输的符号表示》，定义的内容是：

$$L_o = L_e + \mathbf{KG}L_o \tag{2.1.7}$$

$$L_i = L_e + \mathbf{GK}L_i \tag{2.1.8}$$

这两个地方之所以会有区别，是因为对于参与介质来说，需要考虑单位长度内的辐射度。

2.2 解算子

假设具有可逆性，则均衡方程解算子就可以写为：

$$L_i = \mathbf{G}(\mathbf{K}L_i + L_e) \tag{2.2.1}$$

$$\Leftrightarrow (\mathbf{I} - \mathbf{GK})L_i = \mathbf{G}L_e \tag{2.2.2}$$

$$\Leftrightarrow L_i = (\mathbf{I} - \mathbf{GK})^{-1}\mathbf{G}L_e \tag{2.2.3}$$

解算子就是 $\mathbf{S} = (\mathbf{I} - \mathbf{GK})^{-1}\mathbf{G}$。当算子范数的 Neumann 序列收敛时，解算子就可以写为：

$$\mathbf{S} = \sum_{k=0}^{\infty}(\mathbf{GK})^k\mathbf{G} \tag{2.2.4}$$

3. 路径空间积分公式

本章首先介绍统一的路径积分公式，然后将光传输扩展为一个路径积分的形式。

3.1 面散射的符号

我们一般会用箭头来表示光的流动，下面的表示方法都是基于此（需要留意一下 BSDF 和相位函数的表示）：

$$L_e(\boldsymbol{x} \longrightarrow \boldsymbol{y}) := L_e(\boldsymbol{x}, \overrightarrow{\boldsymbol{xy}}) \tag{3.1.1}$$

$$W_e(\boldsymbol{x} \longleftarrow \boldsymbol{y}) := W_e(\boldsymbol{x}, \overrightarrow{\boldsymbol{xy}}) \tag{3.1.2}$$

$$f_s(\boldsymbol{x} \longrightarrow \boldsymbol{y} \longrightarrow \boldsymbol{z}) := f_s(\boldsymbol{y}, \overrightarrow{\boldsymbol{yx}}, \overrightarrow{\boldsymbol{yz}}) \tag{3.1.3}$$

$$f_p(\boldsymbol{x} \longrightarrow \boldsymbol{y} \longrightarrow \boldsymbol{z}) := f_p(\boldsymbol{y}, \overrightarrow{\boldsymbol{xy}}, \overrightarrow{\boldsymbol{yz}}) \tag{3.1.4}$$

$$(\mathbf{G}h)(\boldsymbol{x} \longrightarrow \boldsymbol{y}) := (\mathbf{G}h)(\boldsymbol{x}, \overrightarrow{\boldsymbol{xy}}) \tag{3.1.5}$$

我们可以把球面的积分表示为场景中所有表面的积分：

$$\int_{\mathcal{S}^2} f(\boldsymbol{x}_{\mathcal{M}}(\boldsymbol{x}, \omega)) d\sigma_{\boldsymbol{x}}^{\perp}(\omega) = \int_{\mathcal{M}} f(\boldsymbol{y}) \tilde{G}_{surf}(\boldsymbol{x} \leftrightarrow \boldsymbol{y}) dA(\boldsymbol{y}) \tag{3.1.6}$$

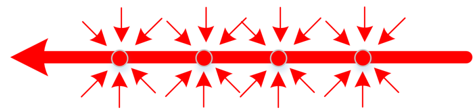
$$\tilde{G}_{surf}(\boldsymbol{x} \leftrightarrow \boldsymbol{y}) = V(\boldsymbol{x} \leftrightarrow \boldsymbol{y}) \cdot \frac{|\cos\theta_x \cos\theta_y|}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2} \tag{3.1.7}$$

$$V(\boldsymbol{x} \leftrightarrow \boldsymbol{y}) := \begin{cases} 1, & if \ \{\alpha \boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y} \mid \alpha \in (0,1)\} \cap \mathcal{M} = \varnothing \\ 0, & otherwise \end{cases} \tag{3.1.8}$$

这里的 θ_x 和 θ_y 是两个表面的法向量 $N(\boldsymbol{x})$、$N(\boldsymbol{y})$ 与 $\overrightarrow{\boldsymbol{xy}}$ 之间的角度。

3.2 体散射的符号

在体散射中，我们考虑放射状地沿着光线积分：



使用 Fubini 理论（关于双重积分换积分次序的理论），公式写为：

$$\int_{\mathcal{S}^2}\int_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{x}_{\mathcal{M}}(\boldsymbol{x},\omega))} f(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}d\omega \tag{3.2.1}$$

$$= \int_{\mathcal{S}^2}\int_0^{\infty} f(\boldsymbol{x}+r\omega)V(\boldsymbol{x}\leftrightarrow\boldsymbol{x}+r\omega)drd\omega \tag{3.2.2}$$

$$= \int_0^{\infty}\frac{1}{r^2}\int_{\mathcal{S}^2(\boldsymbol{x},r)} f(\boldsymbol{y})V(\boldsymbol{x}\leftrightarrow\boldsymbol{y})dA(\boldsymbol{y})dt \tag{3.2.3}$$

$$= \int_{\Omega}\frac{V(\boldsymbol{x}\leftrightarrow\boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2} f(\boldsymbol{y})dV(\boldsymbol{y}) \tag{3.2.4}$$

为了处理包含体和表面终点的组合的情况，定义一个基本的几何项：

$$\tilde{G}_{surf}(\boldsymbol{x}\leftrightarrow\boldsymbol{y}) = V(\boldsymbol{x}\leftrightarrow\boldsymbol{y})\cdot\frac{D_x(\overrightarrow{\boldsymbol{xy}})D_y(\overrightarrow{\boldsymbol{yx}})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2} \tag{3.2.5}$$

$$D_{\boldsymbol{a}}(\omega) := \begin{cases} |N(\boldsymbol{a})\cdot\omega|, & \boldsymbol{a}\in\mathcal{M} \\ 1, & otherwise \end{cases} \tag{3.2.6}$$

3.3 路径空间测量积分与路径表示

本书的重点内容来了——辐射传输方程的路径积分表示形式。

我们考虑一个测量 (measurement)I_j，定义为传感器响应重要性 W_e^j 与入射辐射度 L_i 之间的内积：

$$I_j = \left\langle W_e^j, L_i\right\rangle \tag{3.3.1}$$

$$= \int_{\mathcal{M}}\int_{\mathcal{S}^2} W_e^j(\boldsymbol{x},\omega)L_i(\boldsymbol{x},\omega)d\sigma_{\boldsymbol{x}}^{\perp}(\omega)dA(\boldsymbol{x}) \tag{3.3.2}$$

为了简单起见，我们把 ray 的起点限制在表面上，也就是说传感器不能在体空间中。

我们要研究的目标是表示在整个传输路径空间 $\mathcal{P}$ 的测量积分：

$$I_j = \int_{\mathcal{P}} f_j(\bar{x})d\mu(\bar{x}) \tag{3.3.3}$$

其中，μ 是 $\mathcal{P}$ 的一个测量，f_j 是对于某个测量的贡献权重函数 (contribution weighting function)。

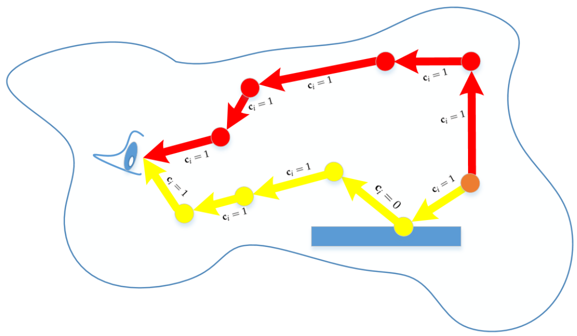
为了使上述情况准确无误，我们定义路径空间，作为所有固定长度的路径的集合（简单来说就是散射了 k 次），根据一个配置向量 $\boldsymbol{c}\in\{0,1\}^k$（就是包括了 k 个顶点的路径空间，取 0 或 1 分别表示当前顶点是表面点还是体空间的点），它由 $\mathcal{M}$ 和 Ω° 上的顶点连接构成。

路径空间使用笛卡尔积的形式来定义，表示下一次散射是在表面上或者是在体空间内。定义式为：

$$\mathcal{P}_k^{\mathbf{c}} := \bigtimes_{i=1}^{k} \begin{cases} \mathcal{M}, & \text{if } \mathbf{c}_i = 0 \\ \Omega^{\circ}, & \text{if } \mathbf{c}_i = 1 \end{cases}$$

$$\mathcal{P} := \bigcup_{k=1}^{\infty}\Big(\bigcup_{c\in\{0,1\}^k}\mathcal{P}_k^c\Big) \tag{3.3.4}$$

给出一个简单的示意图，表示 $k=5$ 时的情况：



使用对面积和体积的 Lebesgue 测量，可以定义一个 $\mathcal{P}$ 联合乘积测量 (combined product measure)：

$$\mu_k^{\mathbf{c}}(D) := \int_D \prod_{i=1}^{k}\begin{cases} \mathrm{d}A(\mathbf{x}_i), & \text{if } \mathbf{c}_i = 0 \\ \mathrm{d}V(\mathbf{x}_i), & \text{if } \mathbf{c}_i = 1 \end{cases} \qquad \mu(D) := \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\mathbf{c}\in\{0,1\}^k}\mu_k^{\mathbf{c}}(D\cap\mathcal{P}_k^{\mathbf{c}})$$

上式表示我们可以在体积空间内积分，也可以在表面空间里积分。

3.4 路径积分表示

为了找到路径空间公式，我们使用均衡方程的算子形式到上一节的测量积分中：

$$I_j = \left\langle W_e^j, L_i\right\rangle \tag{3.4.1}$$
$$= \int_{\mathcal{M}}\int_{\mathcal{S}^2} W_e^j(\boldsymbol{x},\omega)(\mathbf{G}(\mathbf{K}L_i + L_e))(\boldsymbol{x},\omega)d\sigma_{\boldsymbol{x}}^{\perp}(\omega)dA(\boldsymbol{x}) \tag{3.4.2}$$

然后将 $\mathbf{G}$ 算子展开，得到：

$$\int_{\mathcal{M}}\int_{S^2} W_e^{(j)}(\mathbf{x},\omega)\Bigg[\int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{x}_{\mathcal{M}}(\mathbf{x},\omega)}\tau(\mathbf{x}\leftrightarrow\mathbf{y})\,[\mathbf{K}L_i + L_e](\mathbf{y},-\omega)\,\mathrm{d}\mathbf{y}$$
$$+\ \tau(\mathbf{x}\leftrightarrow\mathbf{x}_{\mathcal{M}}(\mathbf{x},\omega))\,[\mathbf{K}L_i + L_e](\mathbf{x}_{\mathcal{M}}(\mathbf{x},\omega),-\omega)\Bigg]\,\mathrm{d}\sigma_{\mathbf{x}}^{\perp}(\omega)\,\mathrm{d}A(\mathbf{x})$$

最后经过一系列较为冗长的推导，可以得到如下的形式（注意这里的几何项包含了衰减 $G(\boldsymbol{x}\leftrightarrow\boldsymbol{y}) := \tilde{G}(\boldsymbol{x}\leftrightarrow\boldsymbol{y})\tau(\boldsymbol{x}\leftrightarrow\boldsymbol{y})$）：

$$I_j = \int_{\mathcal{P}} f_j(\bar{x})d\mu(\bar{x}) \tag{3.4.3}$$

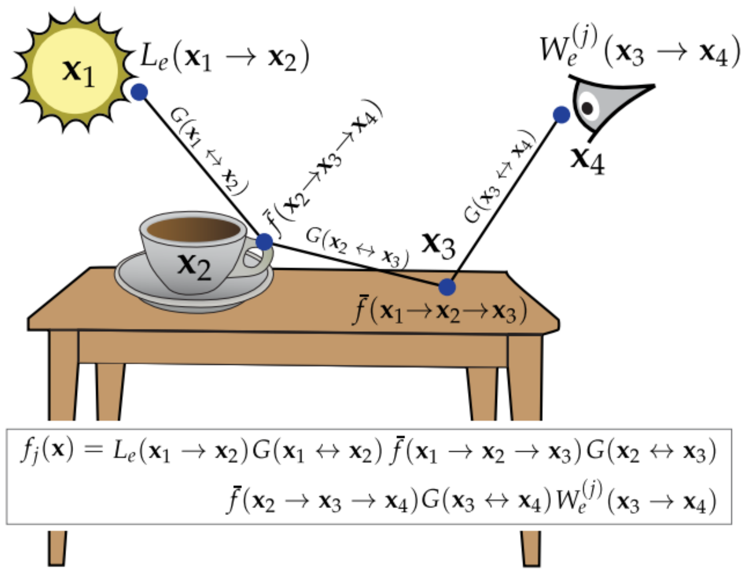
$$f_j(\bar{x}) = f_j(\boldsymbol{x}_1 \cdots \boldsymbol{x}_n) = L_e(\boldsymbol{x}_1 \to \boldsymbol{x}_2)\left[\prod_{k=2}^{n-1} \bar{f}(\boldsymbol{x}_{k-1} \to \boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{x}_{k+1}) G(\boldsymbol{x}_{k-1} \leftrightarrow \boldsymbol{x}_k)\right] \tag{3.4.4}$$

$$\cdot\, G(\boldsymbol{x}_{n-1} \leftrightarrow \boldsymbol{x}_n) W_e^{(j)}(\boldsymbol{x}_{n-1} \to \boldsymbol{x}_n) \tag{3.4.5}$$

在推导的过程中，得到了跟体空间散射描述中相同的公式，这里也给出强调一下：

$$\bar{f}(\boldsymbol{x}_{k-1} \to \boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{x}_{k+1}) := \begin{cases} \sigma_s f_p(\boldsymbol{x}_{k-1} \to \boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{x}_{k+1}), & \boldsymbol{y} \in \Omega^\circ \\ f_s(\boldsymbol{x}_{k-1} \to \boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{x}_{k+1}), & \boldsymbol{y} \in \mathcal{M} \end{cases} \tag{3.4.6}$$

我们用一个包含了四个顶点的路径来表示：



3.5 小结

到目前为止，包含了介质和表面的路径积分表示就已经完成了。有了这个表示形式，就可以想办法来进行积分，获得渲染结果，由此，一大批技术就可以应用进来，例如双向路径追踪、Metropolis 光传输等。

在我从事计算机图形学以后，数学上一直有两个领域对我的研究和学习构成了障碍，一个是泛函分析，另一个是复分析，这也是我接下来要重点花时间学习的方向。有时候我们能看到，在数学领域的一些老方法，可以很好地应用到工程领域，革新一代代的技术。

Bibliography

[1] Jakob, W. (2013). Light transport on path-space manifolds. Dissertations & Theses Gradworks.