函数连续、可微、可导之间的关系

Dezeming Family

2021 年 8 月 26 日

DezemingFamily 系列书和小册子因为是电子书，所以可以很方便地进行修改和重新发布。如果您获得了 DezemingFamily 的系列书，可以从我们的网站 [https://dezeming.top/] 找到最新版。对书的内容建议和出现的错误欢迎在网站留言。

20210827：完成第一版。20220105：添加了第三节“具体例子的解释”。

目录

一 一元函数

对于一元函数而言，可微就等同于可导。

当函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 可导时，说明函数在其中每个点都是可导的。函数在某点 x_0 可导的充要条件是左右导数极限相等：

$$\lim_{\Delta x\to 0^{-0}} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^{+0}} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \tag{一.1}$$

当一元函数在某点 x_0 可导时，设导数为 $f'(x)$，则微分表示为：$dy=f'(x)\Delta x$。可以看到函数的导数是函数的微分与自变量的微分的商，因此也把函数导数称为微商。

连续不一定可导，也不一定可微，比如三角波函数，在三角波的上升沿和下降沿交界处的点虽然是连续的，但左右导数极限都不相等，所以不可导。

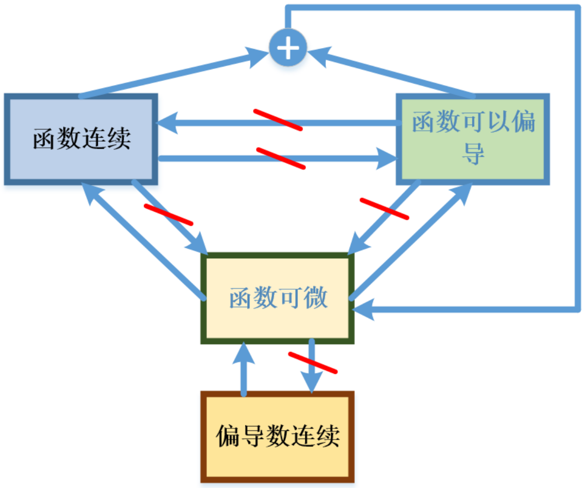
我们再详细分析一下可微的细节，设函数增量 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$，函数增量与微分有什么关系呢，我们推导一下公式：

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y-dy}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y-f'(x)\Delta x}{\Delta x} = 0 \tag{一.2}$$

所以我们可以认为，$\Delta y-dy$ 是 Δx 的高阶无穷小量，所以我们可以得到：$\Delta y=dy+o(\Delta x)=f'(x)\Delta x+o(\Delta x)$，当 Δx 很小的时候，我们就可以近似为：$\Delta y=dy$。

二　多元函数

相比于一元函数，多元函数更复杂一些，首先给出多元函数可微与可导关系的图示：



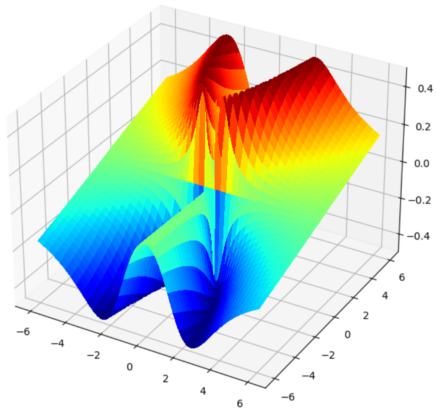
上图我们可以这么记：当偏导数连续的时候，说明函数一定可微且连续；否则其他条件都不能得到函数偏导数连续。可以偏导以及函数连续不能互相得到，且不能得到函数可微。当函数可微时，就说明可以偏导而且函数一定是连续的。连续并且可以偏导，则说明可微。

2 1　多元函数的连续性

对于多元函数 $f(x, y, ...)$ 而言，如果在某一点 $P_0(x_0, y_0, ...)$ 的极限存在，需要这些变量 $x, y, ...$ 无论从任何方向逼近点 P_0 时得到的值都一样才行，比如下面的函数在 $(0, 0)$ 的极限就不存在：

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \tag{二.1}$$

因为该函数沿着 $y = kx$ 和 $y = x^2$ 趋近于 $(0, 0)$ 时得到的值不一样：



当多元函数在某个点的极限值存在且不是无穷大，则多元函数在该点处连续。当多元函数在某个区域的所有点处都连续，则这个多元函数在该区域是连续的。

2 2　多元函数的可偏导性

其实，只要对于下面在某个点的极限存在的函数，就可以在该点进行偏导：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \tag{二.2}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} \tag{二.3}$$

当然，有一阶偏导就会有二阶偏导，但对于多元函数，有两个变量，因此二阶偏导中有二阶混合偏导：

$$\frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \tag{二.4}$$

$$\frac{\partial \frac{\partial f}{\partial y}}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \tag{二.5}$$

$$\frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \tag{二.6}$$

$$\frac{\partial \frac{\partial f}{\partial y}}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \tag{二.7}$$

注意，如果二元函数的两个混合偏导数在某个区域上是连续的，那么它们在这个区域上就是相等的。但是正如上面的图示所述，多元函数是否连续与其是否可以求得偏导时没有什么关系的，比如上面那个不连续的函数，就可以求偏导。

2 3 多元函数的微分——全微分公式

前面一元函数的例子中，我们可以看到，$\Delta y = dy + o(\Delta x) = f'(x)\Delta x + o(\Delta x)$，这里的 $f'(x)$ 可以认为是增量的线性部分，称为“线性主部”。

对于二元函数，如果自变量 x 和 y 都有增量，则：

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \tag{二.8}$$

它称为函数对应于多个自变量增量的全增量。

我们以二元函数为例，我们意图使用线性函数来描述全增量，设线性主部分别是 A 和 B，也就是说，，全增量表示如下，后面的高阶无穷小其实是说明冗余部分是比 $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ 更高阶的无穷小。

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o\Big(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\Big) \tag{二.9}$$

如果在某个点 (x_0, y_0) 能存在上式常数 A 和 B，就称该函数在该点处可微。全微分记做 $dz = A\Delta x + B\Delta y$，可以简单证明：

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o\Big(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\Big) \tag{二.10}$$

$$\Delta y = 0 \Longrightarrow \Delta z = A\Delta x + o\big(|\Delta x|\big) \tag{二.11}$$

$$\Longrightarrow \frac{\Delta z}{\Delta x} = A + \frac{o\big(|\Delta x|\big)}{\Delta x} \tag{二.12}$$

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} \tag{二.13}$$

因此：$A = \frac{\partial z}{\partial x}$，$B = \frac{\partial z}{\partial y}$：

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y \tag{二.14}$$

我们还可以再进行分析：如果 $f_1(x, y) = x$，则 $df_1 = dx = \Delta x$，同理可以得到，$df_2 = dy = \Delta y$，所以全微分就可以写为：

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \tag{二.15}$$

因此可以说明，当多元函数可微时，偏导一定存在。

而且对于极限：

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) \tag{二.16}$$

$$= \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \Big[f(x_0, y_0) + A\Delta x + B\Delta y + o\Big(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\Big)\Big] \tag{二.17}$$

$$= f(x_0, y_0) \tag{二.18}$$

所以说，当函数可微的时候，一定是连续的。

那什么情况下函数可微呢：当函数在某点邻域附近的偏导数存在，且在该点处连续，则函数在该点处就可微。

三 具体例子的解释

连续不等于可导

现在我们用更形象的方法来解释一下，首先先看两个最弱的条件：连续和可偏导。

这两个条件单独存在时并不能说明任何问题。对于一维函数，三角波函数在波峰处连续，但是并不可导，也不可微；扩展到二维的类似函数，也可以出现连续但是不可偏导的情况。

在 a（注意 a 可能是二维点或者高维点）处可偏导只是说明了可以逼近某个点 a，但是不能说明该点可以连续，例如我们提到过的 $\frac{x^2y}{x^4+y^2}$ 在 $(0,0)$ 点就不连续，当然，它虽然可以在 $(0,0)$ 处求偏导，但是由于不连续，我们没法得到全微分形式。

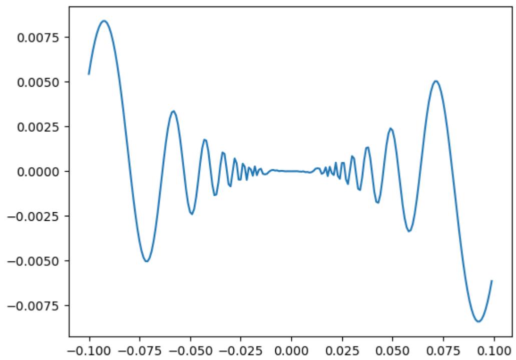
当然，在某点 a 处连续，则在该点就有定义，又可以偏导，因此可微。

导数存在但是导数不连续

对于偏导不连续的例子，我们思考一元函数可导但是导数不连续。设我们有如下函数：

$$g(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases} \tag{三.1}$$

可以看到，当该函数 $x\to 0$ 时，函数值在不断震荡中趋近于 0：



导数为：

$$g'(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & 0 \end{cases} \tag{三.2}$$

$x=0$ 时的导数是用极限来逼近的：

$$g'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2\sin\frac{1}{x+\Delta x}-x^2\sin\frac{1}{x}}{\Delta x} \tag{三.3}$$

$$g'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2\sin\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x}=0 \tag{三.4}$$

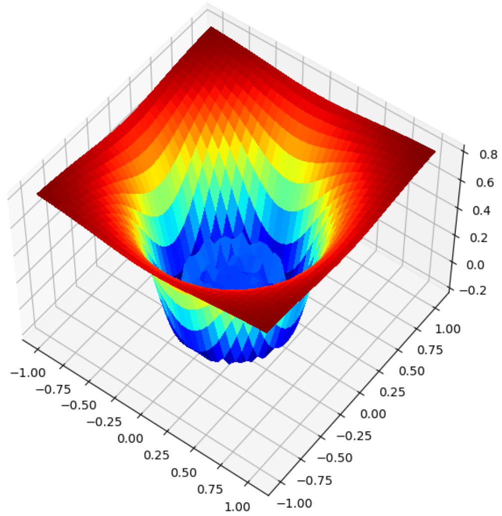
但是当 $x\to 0$ 时，$g'(x)$ 并不会趋近于 0：而是加剧震荡（不会趋近于任何值），所以并不连续。

偏导存在但是偏导不连续

基于此，我们构造一个虽然在 0,0 处存在偏导数且函数连续，但是偏导数并不连续的函数：

$$f(x,y)=\begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & x^2+y^2=0 \end{cases} \tag{三.5}$$

函数图如下：



在 $(0,0)$ 处，分别让 $y=0$ 和 $x=0$ 来得到对 x 和对 y 的偏导：

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x^2}=0 \tag{三.6}$$

$$f_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}y\sin\frac{1}{y^2}=0 \tag{三.7}$$

连续且偏导存在，则可微（我们稍后证明一下可微）。但是偏导数和上面的一元情况一样，在 $x=0$ 的邻域内是震荡的，所以偏导不连续。

偏导不连续但是函数可微的证明

可微的证明：设 $z=f(x,y)$，则全增量为：

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y) \tag{三.8}$$

$$(x,y)=(0,0)\Longrightarrow\Delta z=f(\Delta x,\Delta y) \tag{三.9}$$

而全微分若存在则可以表示为：

$$f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y \tag{三.10}$$

因此:

$$\Delta z-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y=\left(\Delta x^2+\Delta y^2\right)\sin\frac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2} \tag{三.11}$$

我们来判断一下上式的剩余量是否是 $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ 的高阶无穷小：

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\left(\Delta x^2+\Delta y^2\right)\sin\frac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=0 \tag{三.12}$$

由于是高阶无穷小，则说明了函数在 $(0,0)$ 处是可微的。

参考文献

[1] 吴臻分册, 吴臻, 刘建亚. 微积分 [M]. 山东大学出版社, 2004.

[2] https://www.cnblogs.com/zhangwenbiao/p/5426699.html

[3] https://www.zhihu.com/question/377334108