# 反函数

Dezeming Family

2022 年 1 月 5 日

DezemingFamily 系列书和小册子因为是电子书，所以可以很方便地进行修改和重新发布。如果您获得了 DezemingFamily 的系列书，可以从我们的网站 [https://dezeming.top/] 找到最新版。对书的内容建议和出现的错误欢迎在网站留言。

## 目录



## 一 一对一函数与反函数

对于函数而言，如果对定义域内任何 $x_1 \neq x_2$ 都满足 $f(x_1) \neq f(x_2)$，则它是一个一对一函数 (one-to-one function)。

定义域在 $[0, \infty]$ 的函数 $y = x^2$ 是一个一对一函数；但是如果定义域在 $[-\infty, \infty]$，函数 $y = x^2$ 则不是一个一对一函数。

对于一对一函数，$f(x)$ 定义域为 $A$，值域为 $B$，则定义反函数 $f^{-1}(y)$ 的定义域为 $B$，值域为 $A$：

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y \tag{一.1}$$

## 二 反函数的导数

### 2 1 证明方法一

如果 $f$ 是一个一对一可微函数，反函数是 $f^{-1}$ 且 $f'(f^{-1}(a)) \neq 0$，则反函数在 $a$ 点就是可微的。

由于：

$$(f^{-1})'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(a)}{x - a} \tag{二.1}$$

如果 $f(b) = a$，则 $f^{-1}(a) = b$。如果我们让 $y = f^{-1}(x)$，则 $f(y) = x$，由于 $f$ 可微且连续，所以 $f^{-1}$ 也是连续的，当 $x \to a$ 则 $f^{-1}(x) \to f^{-1}(a) = b$。因此：

$$(f^{-1})'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(a)}{x - a} = \lim_{y \to b} \frac{y - b}{f(y) - f(b)} = \lim_{y \to b} \frac{1}{\frac{f(y) - f(b)}{y - b}} \tag{二.2}$$

$$= \frac{1}{\lim_{y \to b} \frac{f(y) - f(b)}{y - b}} = \frac{1}{f'(b)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(a))} \tag{二.3}$$

注意在证明中我们希望计算 $(f^{-1})(a)$ 处的导数，我们已知量是 $f'(x)$ 和 $(f^{-1})(x)$ 的计算方法，基于此构造了上述的证明过程。

## 2 2　证明方法二

如果我们令 $y = f^{-1}(x)$，则 $f(y) = x$，也就是说 $x$ 是 $y$ 的函数，同时 $y$ 也是 $x$ 的函数。

对于一个函数 $f(y)$，我们根据链式法则求其导数：

$$f'(y)\frac{dy}{dx} = 1 \tag{二.4}$$

$$\Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \tag{二.5}$$

所以上式可以表示为莱布尼兹表示 (Leibniz notation)：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \tag{二.6}$$

# 参考文献


[1] James Stewart. Calculus, Eighth Edition. 2016.