二重积分与三重积分

Dezeming Family

2021 年 12 月 27 日

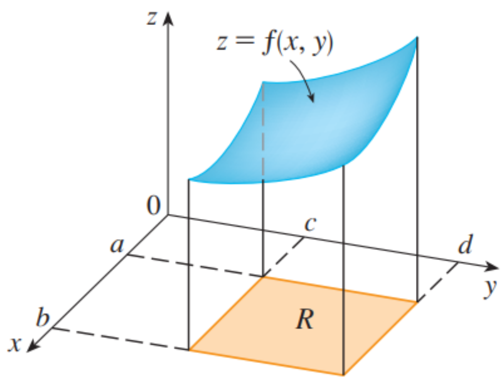
DezemingFamily 系列书和小册子因为是电子书，所以可以很方便地进行修改和重新发布。如果您获得了 DezemingFamily 的系列书，可以从我们的网站 [https://dezeming.top/] 找到最新版。对书的内容建议和出现的错误欢迎在网站留言。

目录

一 重积分问题的引入

无穷积分在工业领域的重要性不言而喻，比如在二维、三维空间求面积、体积。对于单变量的微积分而言，求解并不困难，理论基础也较为简单；而多重积分由于需要确定积分区间，所以带来了一定的复杂性，尤其是转到极坐标更是如此。

考虑我们想求一座大山的体积，山的横纵坐标 (x, y) 对应的高度值为 $z = f(x, y)$：



我们可以把 $x-y$ 平面切分为一系列的小方格，每个小方格面积为 $\Delta\sigma_i$，然后用每个小方格内任意一点的位置的高度乘以小方格的面积，把这些面积累加起来，就能得到面积。

上面的积分区域是 R，设每个子区域 $\Delta\sigma_i$ 的任意一点为 (ξ_i,η_i)，设 λ 是各个子区域的最大直径，则二重积分定义为：

$$\iint_R f(x,y)d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i \tag{一.1}$$

上式中，$d\sigma$ 被称为面积元素。在直角坐标系中，可以用方形网格来分割积分区间，这样除了边界区域，其他地方都是矩形区域。当网格趋近于无限小时，边界部分的分割网格也会趋近于矩形，所以可以认为是 $\Delta\sigma_i=\Delta x_i\cdot\Delta y_i$，即面积元素可以写为 $d\sigma=dxdy$。

只要积分区域内 f 连续，则二重积分就一定存在。

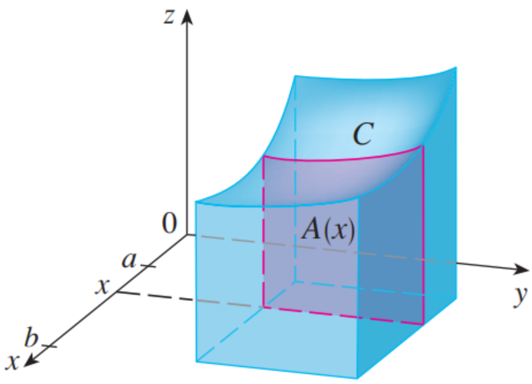
二　二重积分的计算

2 1　矩形区域

对于积分区域是矩形时，即 $R=[a,b]\times[c,d]$，可以使用关于 y 的部分积分 (partial integration with respect to y)：

$$\int_a^b\int_c^d f(x,y)dydx = \int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx \tag{二.1}$$

可以理解为，先固定 x，然后对 $y-z$ 区域进行积分，得到面积 $A(x)$。然后再对面积积分来得到体积：



在矩形区域内积分的 Fubini 理论（比较难证明，但是较好理解）可以表示为，积分次序可以进行改变

$$R=\left\{(x,y)\mid a\le x\le b, c\le y\le d\right\} \tag{二.2}$$

$$\int_a^b\int_c^d f(x,y)dydx = \int_c^d\int_a^b f(x,y)dxdy \tag{二.3}$$

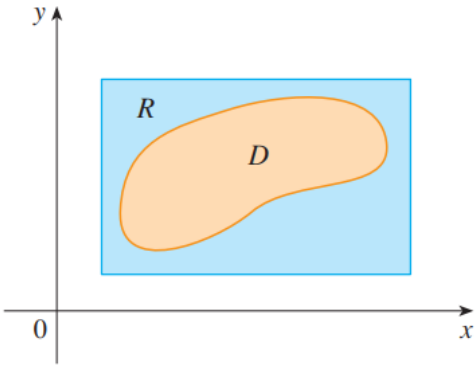
直观上就是先固定 x 求 $y-z$ 构成的面积，和固定 y 求 $x-z$ 构成的面积。

2 2　任意有界区域

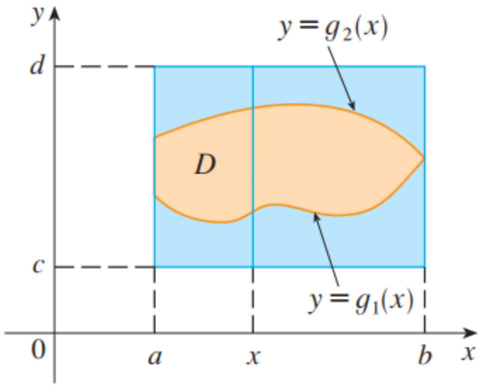
我们现在假设积分区域 D 是一个任意的有界区域。

我们可以用一个矩形囊括这个有界区域，然后做如下定义：

$$F(x,y)=\begin{cases} f(x,y) & if\ (x,y)\ is\ in\ D \\ 0 & if\ (x,y)\ is\ in\ R\ but\ not\ in\ D \end{cases} \tag{二.4}$$



我们设围成的区域可以表示如下：



所以说，只有在 $y < g_1(x)$ 和 $y > g_2(x)$ 这个区间内，$F(x,y) = 0$：

$$\int_c^d F(x,y)dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} F(x,y)dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy \tag{二.5}$$

所以，在某个区域 D 上积分的公式可以表示为：

$$D = \{(x,y) \mid a \le x \le b, g_1(x) \le y \le g_2(x)\} \tag{二.6}$$

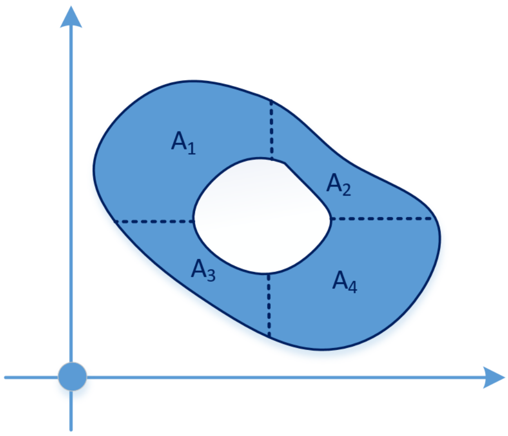
$$\iint_D f(x,y)dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx \tag{二.7}$$

或者：

$$D = \{(x,y) \mid c \le y \le d, h_1(y) \le x \le h_2(y)\} \tag{二.8}$$

$$\iint_D f(x,y)dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dxdy \tag{二.9}$$

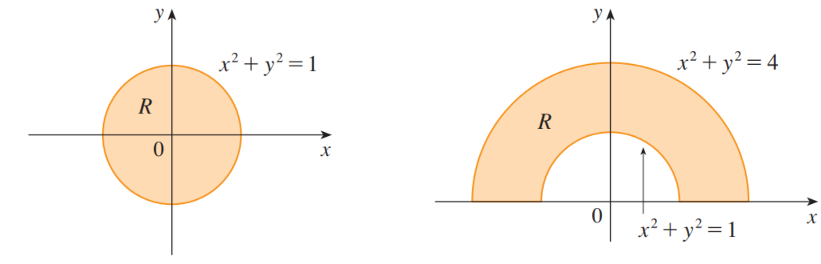
对于一些中间有空洞的积分区域，我们可以划分为几个子区域，分别计算积分：



2 3 扇形圆环区域的极坐标形式的二重积分

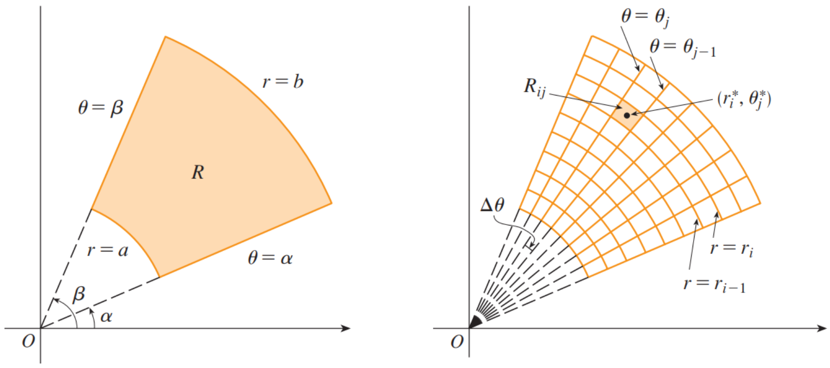
下面的情况，可以把积分区域描述为：

$$R = \left\{(r,\theta) \mid a \le r \le b, \alpha \le \theta \le \beta\right\} \tag{二.10}$$



(a) $R=\{(r,\theta) \mid 0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$ (b) $R=\{(r,\theta) \mid 1 \leqslant r \leqslant 2, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\}$

我们来分析一下每个格子微元，对于一个格子来说，可以标记为下图中的 R_{ij}：



格子 R_{ij} 以及其中心点坐标 (r_i^*, θ_j^*) 为：

$$R_{ij} = \left\{(r,\theta) \mid r_{i-1} \le r \le r_i,\ \theta_{j-1} \le \theta \le \theta_j\right\} \tag{二.11}$$

$$r_i^* = \frac{1}{2}(r_{i-1}+r_i) \qquad \theta_j^* = \frac{1}{2}(\theta_{j-1}+\theta_j) \tag{二.12}$$

一个半径为 r 角度为 θ 的扇形的面积等于 $\frac{1}{2}r^2\theta$，所以小方格区域的面积就是：

$$\Delta A_{ij} = \frac{1}{2}r_i^2(\theta_j-\theta_{j-1}) - \frac{1}{2}r_{i-1}^2(\theta_j-\theta_{j-1}) = \frac{1}{2}(r_i^2 - r_{i-1}^2)\Delta\theta \tag{二.13}$$

$$= \frac{1}{2}(r_i + r_{i-1})(r_i - r_{i-1})\Delta\theta = r_i^*\Delta r\Delta\theta \tag{二.14}$$

令 $g(r,\theta) = rf(r\cos\theta, r\sin\theta)$，上面的小方格积分的 Riemann 和为：

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(r_i^*\cos\theta_j^*, r_i^*\sin\theta_j^*)\Delta A_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(r_i^*\cos\theta_j^*, r_i^*\sin\theta_j^*)r_i^*\Delta r\Delta\theta \tag{二.15}$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} g(r_i^*, \theta_j^*)\Delta r\Delta\theta \tag{二.16}$$

因此：

$$\iint_R f(x,y)dA = \lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(r_i^*\cos\theta_j^*, r_i^*\sin\theta_j^*)r_i^*\Delta r\Delta\theta \tag{二.17}$$

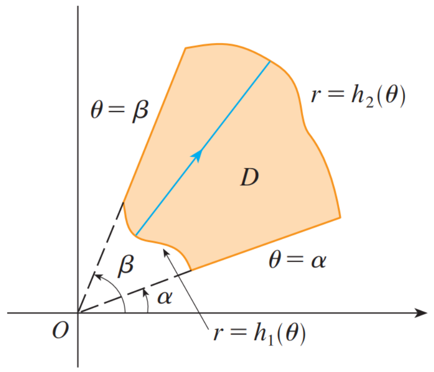
$$= \lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} g(r_i^*, \theta_j^*)\Delta r\Delta\theta \tag{二.18}$$

$$= \int_\alpha^\beta \int_a^b g(r,\theta)dr\ d\theta \tag{二.19}$$

$$= \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\ dr\ d\theta \tag{二.20}$$

2 4　不规则扇形区域的极坐标形式的二重积分

假如现在积分的区域如下：



它的积分推导其实跟矩阵推导到任意区域的方式相同，得到公式：

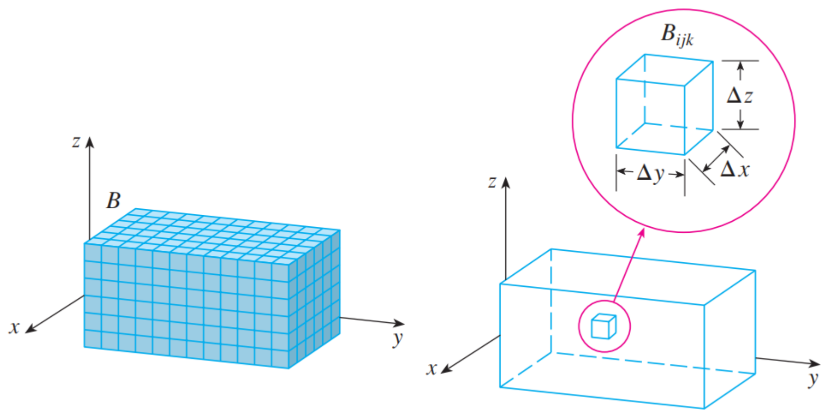
$$D=\left\{(r,\theta)\mid \alpha\le\theta\le\beta,\ h_1(\theta)\le r\le h_2(\theta)\right\} \tag{二.21}$$

$$\iint\limits_D f(x,y)\ dA=\int_\alpha^\beta\int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\ dr\ d\theta \tag{二.22}$$

三　三重积分的计算

3 1　立方体区域的三重积分

不过多解释。对于求立方体区域内的三重积分如图：



$$B=\left\{(x,y,z)\mid a\le x\le b,\ c\le y\le d,\ r\le z\le s\right\} \tag{三.1}$$

定义三重积分：

$$\Delta V=\Delta x\Delta y\Delta z \tag{三.2}$$

$$\iiint\limits_B f(x,y,z)dV=\lim_{l,m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(x_i,y_j,z_k)\Delta V \tag{三.3}$$

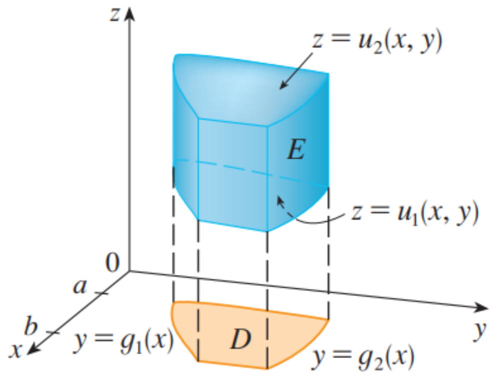
然后给出积分公式：

$$\int_r^s\int_c^d\int_a^b f(x,y,z)dxdydz \tag{三.4}$$

根据 Fubini 定理，积分次序都是可以互换的。

3 2　任意区域的三重积分

扩展到任意区域的方式等同于前面的二重积分。我们定义积分区域：

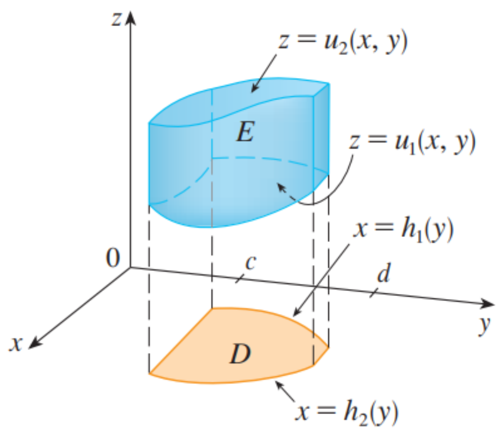


$$E = \left\{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x),\ u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\right\} \tag{三.5}$$

积分公式为：

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x, y, z) dz dy dx \tag{三.6}$$

同理，也可以定义如下积分区域和积分公式：

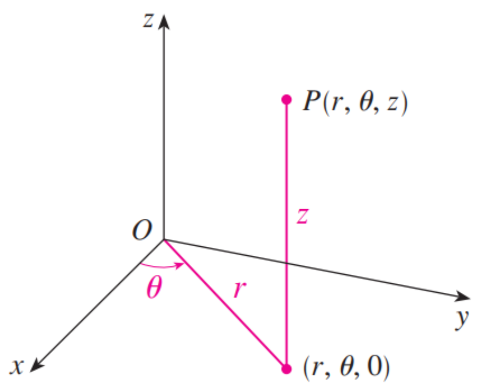


$$E = \left\{(x, y, z) \mid c \leq y \leq d,\ h_1(y) \leq x \leq h_2(y),\ u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\right\} \tag{三.7}$$

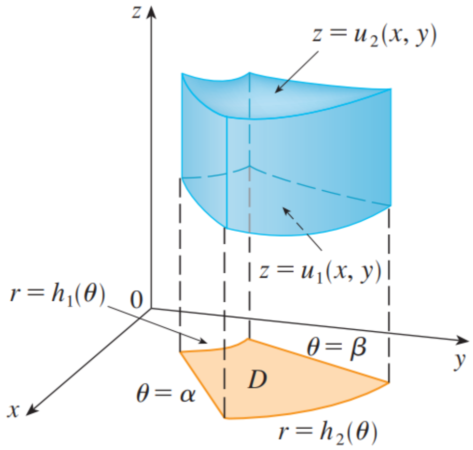
$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x, y, z) dz dx dy \tag{三.8}$$

3 3 圆柱坐标的三重积分

圆柱坐标系的点 (r, θ, z) 化为笛卡尔坐标系为 $(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$。



假如现在我们要积分的区域为：



积分区域可以表示为 E：

$$E=\left\{(x,y,z)\mid(x,y)\in D,\ u_1(x,y)\le z\le u_2(x,y)\right\} \tag{三.9}$$

$$D=\left\{(r,\theta)\mid\alpha\le\theta\le\beta,\ h_1(\theta)\le r\le h_2(\theta)\right\} \tag{三.10}$$

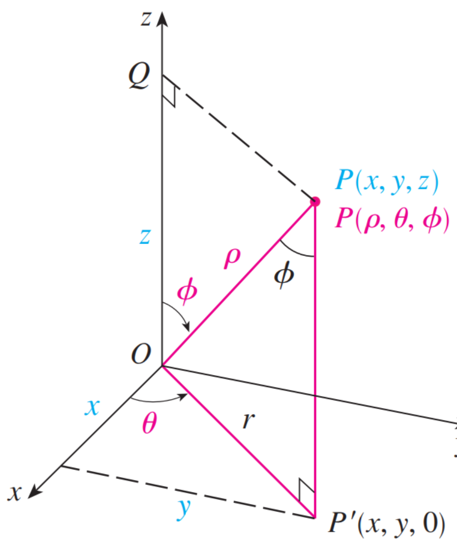
积分式写为：

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)dV=\iint\limits_D\left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)}f(x,y,z)dz\right]dA \tag{三.11}$$

$$=\int_\alpha^\beta\int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)}\int_{u_1(r\cos\theta,r\sin\theta)}^{u_2(r\cos\theta,r\sin\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)rdzdrd\theta \tag{三.12}$$

3 4　球坐标的三重积分

球坐标表示如下：



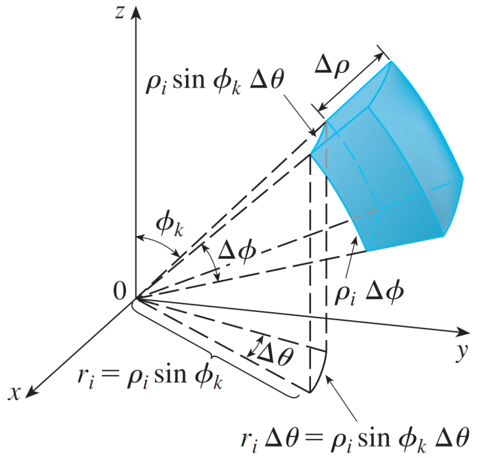
转换到 (x,y,z) 坐标为：

$$(x,y,z)=(\rho\sin\phi\cos\theta,\rho\sin\phi\sin\theta,\rho\cos\phi) \tag{三.13}$$

假设我们要求的球坐标积分范围是：

$$E=\left\{(\rho,\theta,\phi)\mid a\le\rho\le b,\alpha\le\theta\le\beta,c\le\phi\le d\right\} \tag{三.14}$$

把积分区域分解为小块：



可以得到：

$$\Delta V_{ijk} \approx (\Delta\rho)(\rho_i\Delta\phi)(\rho_i \sin\phi_k\Delta\theta) \tag{三.15}$$

$$= \tilde{\rho}_i^2 \sin\tilde{\phi}_k\Delta\rho\Delta\theta\Delta\phi \tag{三.16}$$

其中，上面第二个等式是通过平均值定理得到的，$(\tilde{\rho}_i,\tilde{\theta}_j,\tilde{\phi}_k)$ 是 ΔV 里面的一个点。

所以积分式就是：

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)dV = \lim_{l,m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(\tilde{\rho}_i\sin\tilde{\phi}_k\cos\tilde{\theta}_j,\tilde{\rho}_i\sin\tilde{\phi}_k\sin\tilde{\theta}_j,\tilde{\rho}_i\cos\tilde{\phi}_k)\tilde{\rho}_i^2\sin\tilde{\phi}_k\Delta\rho\Delta\theta\Delta\phi \tag{三.17}$$

$$= \int_c^d\int_\alpha^\beta\int_a^b f(\rho\sin\phi\cos\theta,\rho\sin\phi\sin\theta,\rho\cos\phi)\rho^2\sin\phi\ d\rho\ d\theta\ d\phi \tag{三.18}$$

一般情况下，球坐标积分是用于圆锥体或者球体。

扩展到更一般的情况：

$$E = \left\{(\rho,\theta,\phi)\mid \alpha\le\theta\le\beta, c\le\phi\le d, g_1(\theta,\phi)\le\rho\le g_2(\theta,\phi)\right\} \tag{三.19}$$

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)dV = \int_c^d\int_\alpha^\beta\int_{g_1(\theta,\phi)}^{g_2(\theta,\phi)} f(\rho\sin\phi\cos\theta,\rho\sin\phi\sin\theta,\rho\cos\phi)\rho^2\sin\phi\ d\rho\ d\theta\ d\phi \tag{三.20}$$

四　总结

到目前为止，讲述的二重积分和三重积分的内容都是国内大部分高校所涉及的内容，还有些更复杂的情况需要考虑，例如，如何在重积分中进行变量替换法则、如何在重积分中对不规则区域使用 Fubini 理论等。这些问题都会放在“数学分析”这个栏目里进行讲解。

参考文献

[1] 刘建亚，吴臻《微积分 2》2011. 高等教育出版社.

[2] James Stewart. Calculus, Eighth Edition. 2016.