正定矩阵与负定矩阵

Dezeming Family

2021 年 7 月 14 日

DezemingFamily 系列书和小册子因为是电子书，所以可以很方便地进行修改和重新发布。如果您获得了 DezemingFamily 的系列书，可以从我们的网站 [https://dezeming.top/] 找到最新版。对书的内容建议和出现的错误欢迎在网站留言。

20210715：完成第一版。20211230：补充了正定矩阵与奇异值分解的内容。

目录

一 实数矩阵 1

二 复数矩阵 2

三 正定矩阵与奇异值分解 2

参考文献 2

一 实数矩阵

正定矩阵是从矩阵二次型中提出的（见 DezemingFamily 的《矩阵二次型》），在分析曲面，函数优化等方面具有重要作用，可以帮助理解和分析很多理论和概念。

我们先只考虑由实数构成的矩阵。

如果矩阵 A 是 $n\times n$ 的实对称矩阵（$A_{i,j}=A_{j,i}$），对于长度为 n 的非零向量 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{x}^TA\boldsymbol{x}>0$ 恒成立，则矩阵 A 是一个正定矩阵。可以简单证明，单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 就是一个正定矩阵。

而半正定矩阵就是相同条件下，满足 $\boldsymbol{x}^TA\boldsymbol{x}\geq 0$ 成立即可。

负定矩阵和半负定矩阵恰好相反，相同条件下，$\boldsymbol{x}^TA\boldsymbol{x}<0$ 被称为负定矩阵，$\boldsymbol{x}^TA\boldsymbol{x}\leq 0$ 就被称为半负定矩阵。

在线性代数中，正定矩阵类似于代数中，整个复数域中的正实数的作用。

我们假设有一个正定矩阵 A，其某个特征值 λ_i 对应于特征向量 $\boldsymbol{b}_i$（见 DezemingFamily 的《特征值与特征向量》）：

$$A\boldsymbol{b}_i=\lambda_i\boldsymbol{b}_i \tag{一.1}$$

由此可以得到：

$$\boldsymbol{b}_i^TA\boldsymbol{b}_i=\lambda_i\boldsymbol{b}_i^T\boldsymbol{b}_i>0 \tag{一.2}$$

又因为 $\boldsymbol{b}_i^T\boldsymbol{b}_i>0$，所以 $\lambda_i>0$，这对任意的特征值都是成立的，所以说，正定矩阵的特征值必须全都大于 0。同理可以推出负定矩阵特征值都必须小于 0。

二　复数矩阵

当一个矩阵中某个元素 $A_{i,j} = \overline{A_{j,i}}$，即等于它对角线对称元素的共轭，我们就称其为 Hermite 矩阵，通常翻译为厄米特矩阵，即共轭矩阵。

当一个 $n \times n$ 的矩阵 A 是一个共轭矩阵，当且仅当任意的非零复向量 $\boldsymbol{x}$，都有 $\boldsymbol{x}^* A \boldsymbol{x}$ 时，矩阵 A 是正定矩阵。其中，$\boldsymbol{x}^*$ 是 $\boldsymbol{x}$ 的共轭转置。我们以三维向量和 3×3 矩阵为例：

$$\begin{bmatrix} \overline{x}_1 & \overline{x}_2 & \overline{x}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{二.1}$$

经过计算就可以发现结果是 $C_1\overline{x}_1x_1 + C_2\overline{x}_2x_2 + C_3\overline{x}_3x_3$ 的形式，这是一个实数，因此可以与 0 进行比较大小。

其他类似矩阵

正交矩阵

当一个矩阵的逆等于其转置时，称为正交矩阵：

$$A^TA = E \tag{二.2}$$

$$A^T = A^{-1} \tag{二.3}$$

酉矩阵

当一个矩阵的逆等于其共轭转置时，称为酉矩阵：

$$A^HA = E \tag{二.4}$$

$$A^H = A^{-1} \tag{二.5}$$

正规矩阵

当一个矩阵满足下式，就被称为正规矩阵：

$$A^HA = AA^H \tag{二.6}$$

当矩阵 A 是实数矩阵时，显然 $A^TA = AA^T$，则称 A 为实正规矩阵。

三　正定矩阵与奇异值分解

关于奇异值分解参考《特征分解与奇异值分解》。

对称矩阵 A 可以分解为 $U\Lambda U^T$，其中 U 是正交矩阵，所以：

$$\boldsymbol{v}^TA\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^T(U\Lambda U^T)\boldsymbol{v} = (U^T\boldsymbol{v})^T\Lambda(U^T\boldsymbol{v}) \tag{三.1}$$

如果对角矩阵 Λ 里对角线每个元素都是正的，则不管 $U^T\boldsymbol{v}$ 是什么向量，它们相乘以后得到的都是一个正数。

可以证明的是，当且仅当一个对称矩阵 A 的全部特征值都是正的，这个矩阵 A 才是一个对称正定矩阵。由于 U 可逆，Λ 也可逆，所以其实对称正定矩阵 A 也一定是可逆矩阵。

对角占优矩阵一定是正定矩阵，但是正定矩阵并不一定对角占优矩阵。对角占优矩阵表示对角线元素的值大于其他当前行其他元素的绝对值之和：

$$a_{i,i} > \sum_{i \neq j} |a_{i,j}| \quad for\ all\ i \tag{三.2}$$

参考文献

[1] https://zhuanlan.zhihu.com/p/81169491

[2] https://blog.csdn.net/jbb0523/article/details/