洛必达法则

Dezeming Family

2022 年 1 月 2 日

DezemingFamily 系列书和小册子因为是电子书，所以可以很方便地进行修改和重新发布。如果您获得了 DezemingFamily 的系列书，可以从我们的网站 [https://dezeming.top/] 找到最新版。对书的内容建议和出现的错误欢迎在网站留言。

目录

一 不确定形式

有时候我们想求一些函数在某些位置的极限，但是并不是很好求，例如下面的几个例子。

$\frac{0}{0}$ 型的不确定形式 (indeterminate form)：

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} \tag{一.1}$$

$\frac{\infty}{\infty}$ 型的不确定形式：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2+1} \tag{一.2}$$

$0\cdot\infty$ 型的不确定形式：

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x \tag{一.3}$$

$\infty-\infty$ 型的不确定形式：

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}(\sec x-\tan x) \tag{一.4}$$

还有更多复杂的情况，比如指数：

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} \tag{一.5}$$

我们会在第三章对各种情况举例来求解。

二　洛必达法则

2 1　洛必达法则的概念

假设 f 和 g 在某个区间内都是可微的，且 $g'(x) \neq 0$。假设：

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \;\; and \;\; \lim_{x\to a} g(x) = 0 \tag{二.1}$$

$$or \;\; \lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \;\; and \;\; \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty \tag{二.2}$$

如果下式右边的极限存在（如果是 ∞ 也算存在），就能求出左边的极限：

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{二.3}$$

我们可以简单检查其合理性，设 $f(a) = g(a) = 0$ 且 f' 和 g' 都是连续的，$g'(a) \neq 0$，则：

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} \tag{二.4}$$

$$= \frac{\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} \tag{二.5}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \tag{二.6}$$

2 2　证明

洛必达法则的证明并不容易，但可以从很多数学分析教材中找到完整的证明。在微积分学中，一般都是作为定理直接使用的。

洛必达法则的证明有很多种方法，在我参考了不少方法以后，除了使用柯西中值定理，并没有找到让我满意的、很直观的证明过程（尽管洛必达法则很直观，也很容易理解），这里只证明 $\frac{0}{0}$ 型，$\frac{\infty}{\infty}$ 型以后有时间再补上（目前我阅读过的证明过程一般确实比较复杂）。这里采用 [2] 的证明思路。

对于 $\frac{0}{0}$ 型，设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 满足 $x \to a$ 时，$f(x) \to 0$ 且 $g(x) \to 0$；两函数在 a 的去心邻域内可导，且 $g'(x) \neq 0$。

我们设 $f(a) = g(b) = 0$（注意 a 处的函数值可以没有定义，但为了证明我们需要补上），则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 $[a, x]$（x 与 a 邻域内一点）上存在一点 ξ，满足柯西定理的条件：

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \tag{二.7}$$

由于当 $x \to a$ 时，$\xi \to a$，所以上式的两端取极限：

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi\to a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{二.8}$$

当 a 这里是 ∞ 时，可以用 $a = \frac{1}{t}$ 代替，证明过程可见 [1] 的 499 页。

三　洛必达法则与各种不确定形式的解法

$0 \cdot \infty$ 型的不确定形式：

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = 0 \tag{三.1}$$

$\infty - \infty$ 型的不确定形式：

$$\lim_{x\to (\frac{\pi}{2})^-} (\sec x - \tan x) = \lim_{x\to (\frac{\pi}{2})^-} (\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x}) \tag{三.2}$$

$$= \lim_{x\to (\frac{\pi}{2})^-} \frac{1-\sin x}{\cos x} = \lim_{x\to (\frac{\pi}{2})^-} \frac{-\cos x}{-\sin x} = 0 \tag{三.3}$$

指数类型：

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^{g(x)} \tag{三.4}$$

可以分为三大类：

$\lim_{x\to a} f(x) = 0$	$\lim_{x\to a} g(x) = 0$	type 0^0
$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$	$\lim_{x\to a} g(x) = 0$	type ∞^0
$\lim_{x\to a} f(x) = 1$	$\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$	type 1^∞

可以令 $y = [f(x)]^{g(x)}$，则 $\ln y = g(x) \ln f(x)$。这样我们就可以把原式写为：$y = e^{g(x)\ln f(x)}$，我们可以先求出 $\ln y$ 的极限，然后就可以得到原式的极限了。

参考文献

[1] James Stewart. Calculus, Eighth Edition. 2016.

[2] 刘建亚，吴臻微积分 1. 2016. 高等教育出版社.