线性近似与微分

Dezeming Family

2022 年 1 月 1 日

DezemingFamily 系列书和小册子因为是电子书，所以可以很方便地进行修改和重新发布。如果您获得了 DezemingFamily 的系列书，可以从我们的网站 [https://dezeming.top/] 找到最新版。对书的内容建议和出现的错误欢迎在网站留言。

目录

一　线性近似

在函数 $f(x)$ 中 $x = a$ 附近的点可以用下面的方法来近似表示：

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \Delta(x) \tag{一.1}$$

其中 $\Delta(x)$ 是关于 x 的高阶无穷小量。

如果你学过泰勒级数，应该就明白这是泰勒展开的前两项。

二　微分

在牛顿时期，导数的定义（此时并不是严格的导数，而是切线斜率）都是使用的无穷小量，而不是极限 [2]。

比如计算 x^2 的导数：

$$\frac{d(x^2)}{dx} = \frac{f(x+dx)-f(x)}{dx} = \frac{2xdx+dx^2}{dx} = 2x + dx = 2x \tag{二.1}$$

这样定义导数会有一个问题，就是 dx 首先被当做非 0 的数约掉了，然后又被当做 0 在加法中舍去了。此时，由于导数是 dy（y 的微分）和 dx（x 的微分）的比值，所以导数被称为微商。

一直到 200 年以后，才使用极限的理论重新定义了导数：

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \tag{二.2}$$

我们通过导数来定义微分（所以神奇的是，以前先有了微分（切线斜率），再出现了导数，现在又重新使用导数来定义微分）：

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) = 0 \tag{二.3}$$

$$\Longrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) = 0, \quad \lim_{\Delta x \to 0} a = 0 \tag{二.4}$$

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + a\Delta x \tag{二.5}$$

我们令微分 $dy = f'(x)\Delta x$，其实这就是一个定义，意义是对函数值变化的逼近。

现在思考一下什么是 dx，我们其实可以使用函数来得到 dx：设 $y = x$，所以 $dy = 1\Delta x$，所以可以推出 $dx = \Delta x$（因为对于 $y = x$ 来说 x 方向的变化量等于 y 方向的变化量）。

对于古典微积分来说，其实 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$ 可以理解为是消去作用（古典微积分就是靠消去无穷小量得到的）；而在现代的极限微积分中，这两个 du 应该理解为分别代表不同的函数。在《链式法则与隐式微分》中，我们在链式法则的引入一节，就是使用古典的消去方法来得到的链式法则，而后一节的严格证明则是使用现代的极限思想进行的证明。

三　后续发展

无穷小量更直观，也更符合直觉，所以也在不断发展。后来，数学界发明了超实数，可以使用无穷小量 [2]，基于超实数定义的微积分的研究又被称为非标准分析。

参考文献

[1] James Stewart. Calculus, Eighth Edition. 2016.

[2] https://www.zhihu.com/question/22199657/answer/115178055

[3] https://baike.baidu.com/item/非标准分析/7763482?fr=aladdin

[4] https://www.zhihu.com/question/53159621