复数的起源

Dezeming Family

2021 年 12 月 1 日

DezemingFamily 系列书和小册子因为是电子书，所以可以很方便地进行修改和重新发布。如果您获得了 DezemingFamily 的系列书，可以从我们的网站 [https://dezeming.top/] 找到最新版。对书的内容建议和出现的错误欢迎在网站留言。

目录

一 基本介绍 1

二 二次方程、三次方程与解 1

三 沃利斯与复数的数轴表示 3

四 复数——二维数 3

五 复数与欧拉公式 4

六 棣莫弗公式 5

七 欧拉公式的证明 6

八 总结 6

参考文献 6

一 基本介绍

要说复数是怎么产生的，可能很多人都会说，不就是 $\sqrt{-1}$ 呗！但是，这仿佛又不合我们的直觉。如果存在一个数，它的平方却是一个负数，那它一定不是一般人可以理解的。复数方法直到欧拉时期才开始大放异彩，而之前，虽然人们屡屡遇到它，但却又避之不及——它违反了人们的直觉。

在我心中，复数是数学从“可以理解”变到“难以理解”的开端。尽管一些比较难的奥赛题都是涉及数论和代数的，但它们都不违反直觉。我们高中就开始学习复数，但它的不可理解性甚至超过了大学的高等数学。复数很容易进行可视化——一个实轴和一个虚轴，但是我们未必能从直觉上去理解这件事情。

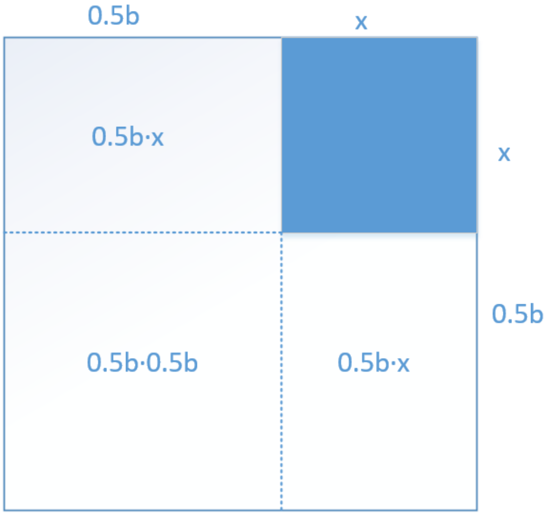
后来，在阅读《Visual complex analysis》[1] 和《Mathematics and its History》[2] 时，对复数的起源有了一些自己的思考和感悟，于是打算写这么一个专题，介绍一下复数的起源。本文会从历史的角度，介绍复数的起源，从历史来剖析，可以更好地理解究竟什么是复数，以及复数应该怎么去应用。对于所有出现过的人物，我会注明其生平和国家，这样相信大家就能对复数的历史更有把握。由于古代科学全才太多，很多人都身兼数职，例如数学家、物理学家、天文学家，这里为了方便只标记为数学家。

二 二次方程、三次方程与解

如果你能明白负数是怎么产生的，或许就不难理解复数的产生。

直觉上，自然界没有负数。要么，我们有一个苹果，要么有两个，就算没有，也是零个（值得一说的是，“0”的起源也是费了老一番功夫了）。而我们并不是很难理解负数，因为世界上存在减法，并且减法和加法都符合交换律，所以负数这种东西其实就是存在于算数中的一种工具，脱离了算术，它什么都不是——比如，“我有-1 个苹果”，这没有意义对吧？而在一整个算术系统中，负数就具有了实际意义：我欠了别人一个苹果。

阿尔·花拉子米（约 780～约 850，阿拉伯数学家）对于一元二次方程问题（$x^2+bx=c$）的解法是基于面积的，这种解法由于面积不会是负数，所以只会得到正根：



如上图：

$$(x+0.5b)^2 = c+0.25b^2 \tag{二.1}$$

而且，$c+0.25b^2$ 要大于 0，否则就只有复数根了。在当时的阿拉伯数学界，人们连负数都不承认，更何况复数呢？

笛卡尔（1596-1650，法国数学家）坐标系诞生以后，二次方程的求解问题在图示上可以理解为是一个曲线和横坐标 x 之间的交点。“虚数”这个名词就是笛卡尔起的，他不接受复根。

我们把目光局限到 16 世纪，尽管这个时候还没有坐标系和解析几何出现，但我们仍然可以对方程进行一些基本研究。按照直觉理解，既然有很多情况下二次方程可能没有解，我们就没有必要去考虑什么复交点。面积法更是如此，对负数开方显得非常没有必要。

三次方程的研究则不可避免的会使得复数开始进入人们的视野。三次方程和二次方程的一个区别在于，它永远有一个及以上的实根，但是有时候我们能没法使用代数方法计算出这个实根（在不使用复数的前提下），我们马上会解释这一点。

三次方程 $y^3=px+q$ 的卡尔达诺（1501-1576，意大利数学家）解为：

$$y=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q}{2})^2-(\frac{p}{3})^3}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{(\frac{q}{2})^2-(\frac{p}{3})^3}} \tag{二.2}$$

当 $(\frac{q}{2})^2-(\frac{p}{3})^3<0$ 时，就会出现复数。但是，例如下面的方程：

$$x^3 = 15x+4 \tag{二.3}$$

$$x = \sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}+\sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}} \tag{二.4}$$

它总会在实轴上得到一个根，那么就奇了怪了，这个根是哪里来的？

卡尔达诺提出应该去思考这种负数开平方的解的形式，但是也只是建议尝试表示一下而已，他认为这种东西其实用处不会很大（这充分说明了历史的局限性，即使是顶级的数学家也不能过于超前地认识到一些方法）。

直到邦贝利（1526-1572，意大利数学家）认识到，$\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}$ 和 $\sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}}$ 可能分别具有 $2+n\sqrt{-1}$ 以及 $2-n\sqrt{-1}$ 的形式，于是他进行了一系列的计算，发现正好是三次方的关系，即：

$$\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}=2+\sqrt{-1} \tag{二.5}$$

$$\sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}}=2-\sqrt{-1} \tag{二.6}$$

所以这个三次方程的解就是：

$$x=\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}+\sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}}=2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1}=4 \tag{二.7}$$

三　沃利斯与复数的数轴表示

我们知道了复数的引入，但是如果它只能用来解方程，那就复数的发展就只能停留在高中水平——高考数学选择题的第一题——仅仅为了判断学生是否足够细致的一道题。

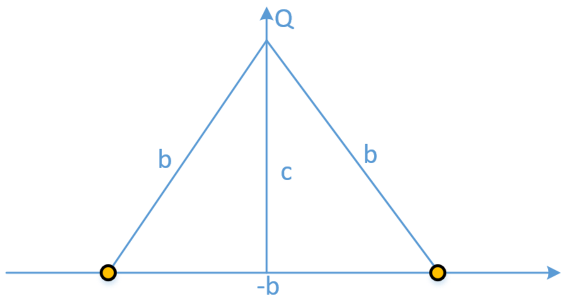
尽管邦贝利成功使用复数来得到了三次方程的根，但是应该如何表示复数，却并不容易。

沃利斯（1616-1703，英国数学家）在这方面做出了一点尝试。尽管他的方式不正确，但是我们按照他的思路，来分析一下复数根，例如方程：

$$x^2+2bx+c^2=0 \qquad b,c>0 \tag{三.1}$$

$$x=-b\pm\sqrt{b^2-c^2} \tag{三.2}$$

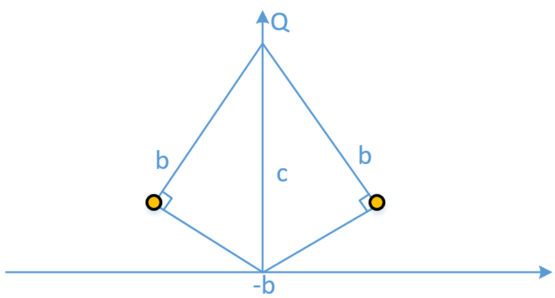
当 $b>c$ 时，沃利斯用这个图来进行表示：



但是当 $b<c$ 的时候，b 太短，所以交点会偏离直线外（这个想法是多么的美妙！），但可惜他的偏离方式不是很正确。首先他把式子变为这样：

$$x=-b\pm i\sqrt{c^2-b^2} \tag{三.3}$$

然后图示就变为了：



但是可以看出来，当 b=0 时，$\pm ic$ 会在同一个位置，即 $+i=-i$，这显然是不对的。但是在当时的那个年代，能有这种想法（即虚数会在数轴之外）已经很不容易了。在沃利斯的时代，人们连负数都持怀疑态度，比如 $(-1)\times(-1)$ 的意义，也是尚且不明确的，这也说明沃利斯的想法之超前了。

四　复数——二维数

即使到了 18 世纪，人们对于复数的观点都是如何利用它去推导实数的结论。人们会利用到这些结论，但如果有可能，人们会避开使用复数。

但如果复数只是作为一个工具而存在的，那么也必然不会发展出那么多的理论。现在我们要明确的是，我们假设数不再是一维的，而是二维的：$x=(a,b)$，其中，实数是一种特例：$x_R=(a,0)$。函数值也不再只是一维的，而是二维的：$f(x)=(c,d)$。

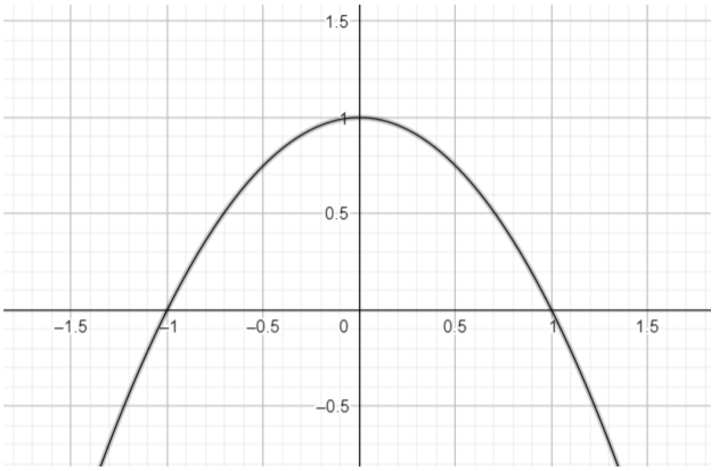
对于结果为实值的函数，其实就是 $f\big((a,b)\big)=(c,0)$,。在以前，我们会认为只存在 $(a,0)$ 这样的数（当然，这就是实数），而后来，我们开始逐渐接受 $(a,b)\quad b\neq 0$ 这样的数了。

我们很难绘制 $f\big((a,b)\big)$，因为 (a,b) 是二维的，$f\big((a,b)\big)$ 也是二维的，这就需要四维空间去表示。但我们可以思考，对于某个一元函数 $f(x)$，它的输入是 (a,b)，令 $f\big((a,b)\big)=(c,0)$，例如：

$$f_1(x)=x^2+2x+2=0\Longrightarrow(x+1)^2+1=0 \tag{四.1}$$

$$x_1=-1+i\qquad x_2=-1-i \tag{四.2}$$

我们令 $x_a=-1+a\times i$，a 一直从 0 变到 20，得到 $T(a)=f_1(x_a)$ 为：



$T(a)$ 的输出都是实数，而且也是连续变化的，在 $a=\pm1$ 时，得到方程的两个虚数根。

当我们能够接受一维，我们就应该尝试去接受二维——复数就是存在于二维上的数 $(x+iy)$，这就跟二维平面上的某个点 (x,y) 很像。但注意，点是点，数是数，这两者还是需要区分的。我们应该认识到的是，复数就像实数一样，它是实实在在存在的，而不仅仅是为了计算而使用的某个工具。

所以，既然数可以不止是一维的，那么——超复数，即三元复数、四元复数等更高维度的复数也会是存在的。超复数的发展与群论是密不可分的，只有在定义了一系列的运算规则以后，才可以使用它们来进行一些具体的操作，比如复数 (a,b) 与 (c,d) 乘除、加减的运算规则。

五　复数与欧拉公式

人们从很久之前就开始从事对角度的研究，也推导出了不少定理，例如 $\sin 2x=2\sin x\cos x$（这些用纯几何方法都是可以得到的）。注意本节推导的欧拉公式只是直观上去理解，严谨的推导放在了后面一节。

泰勒（1685-1731，英国数学家）在微积分的基础上推导出了泰勒级数，借助泰勒级数，可以得到：

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...++\frac{x^n}{n!}+... \tag{五.1}$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}...+\frac{x^{4n-4}}{(4n-4)!}-\frac{x^{4n-2}}{(4n-2)!}+... \tag{五.2}$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}...+\frac{x^{4n-3}}{(4n-3)!}-\frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!}+... \tag{五.3}$$

把 $x=iz$ 代入，就能得到 $e^{iz}=\cos z+i\sin z$。

当然也可以借助微积分方法：

$$let\quad f(z)=\frac{\cos z+i\sin z}{e^{iz}} \tag{五.4}$$

分母不可能为 0，所以定义成立。求得 $f'(z)$，发现其为 0，因此 $f(z)$ 就是个常数函数。因此 $f(z)=f(0)=1$，所以即可得到 $e^{iz}=\cos z+i\sin z$。

这个 $e^{iz}=\cos z+i\sin z$ 公式就是有名的欧拉（1707-1783）公式。

大家可能会觉得欧拉（1707-1783，瑞士数学家）对复数比较了解，毕竟欧拉公式（$e^{ix}=\cos x+i\sin x$）可是被誉为最美的复数公式。但其实欧拉对于复数的运算也是有问题的，比如他认为 $\sqrt{-1}\times\sqrt{-4}=\sqrt{-1\times -4}=2$，但其实应该是 $i\times 2i=-2$。

还好，在最初推导欧拉公式时，并没有使用上面的方法（或者说上面的方法在当时还不是很成熟，而且其实也会依赖于欧拉公式，所以并不算是证明，而仅仅只是验证），而是用到了棣莫弗（1667-1754，法国数学家）公式，我们下一节先讲解棣莫弗公式，然后再用其推导出欧拉公式。

六　棣莫弗公式

棣莫弗（1667-1754，法国数学家）公式对复数也做出了一定的贡献。

我们先来看分角问题，这是韦达（1540-1603，法国数学家）首先注意：

$$\cos 3x=\cos(2x+x)=\cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x \tag{六.1}$$

$$=(2\cos^2 x-1)\cos x-2(1-\cos^2 x)\cos x \tag{六.2}$$

$$=4\cos^3 x-3\cos x \tag{六.3}$$

而对于方程 $x^3+ax+b=0$，令 $x=ky$，选取参数使得 $\frac{k^3}{ak}=\frac{-4}{3}$ 或者 $k=\sqrt{\frac{-4a}{3}}$，就可以得到：

$$4y^3-3y=c \tag{六.4}$$

如果令 $y=cos\theta$，则 $\cos 3\theta=c$，画出 3θ 这个角，再三等分就能解出 y。

分角问题可以从几何上给出三次方程的解的直观表示，有趣的是这种方式好像看起来没有出现复数，其实不然——当 $c>1$ 的时候其实就会需要复数来解释。

韦达还有一个方程：

$$y=\sin n\theta \qquad x=\sin\theta \tag{六.5}$$

$$y=nx-\frac{n(n^2-1)}{3!}x^3+\frac{n(n^2-1)(n^2-3^2)}{5!}x^5+... \tag{六.6}$$

牛顿（1643-1727，英国数学家）断言它对所有的 n 都成立，注意这个方程有一个解，这个解出现在了棣莫弗（1667-1754，法国数学家）的文章中，可以表示为：

$$x=\frac{\sqrt[n]{y+\sqrt{y^2-1}}+\sqrt[n]{y-\sqrt{y^2-1}}}{2} \tag{六.7}$$

其实如果我们把 x,y 代入，就能得到关于角度的描述。这些内容的推导过程比较繁琐，所以在此忽略。我们可以看到他的公式这样表示的意义其实是为了避免出现复数的“直接表示”，即使用 $\sqrt{(\sin n\theta)^2-1}$ 来表示 $i\cos n\theta$。

我们最后来看一下现代棣莫弗公式：

$$(\cos z+i\sin z)^n=\cos nz+i\sin nz \tag{六.8}$$

$$(\cos z-i\sin z)^n=\cos nz-i\sin nz \tag{六.9}$$

$$\Longrightarrow \tag{六.10}$$

$$\cos nz=\frac{(\cos z+i\sin z)^n+(\cos z-i\sin z)^n}{2} \tag{六.11}$$

$$\sin nz=\frac{(\cos z+i\sin z)^n-(\cos z-i\sin z)^n}{2i} \tag{六.12}$$

七 欧拉公式的证明

我们先给出一个定义：

$$e^x = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n \tag{七.1}$$

$$\tag{七.2}$$

以及一个结论，即牛顿-墨卡托级数：$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$。当 $x \to 0$ 时，$\ln(1+x) \approx x$。

点 $u+iv$ 的极坐标表示为 $r(\cos\theta + i\sin\theta)$，其中 $r = \sqrt{u^2+v^2} \in R$，$\theta = \arctan(\frac{v}{u})$。棣莫弗公式就可以写为：

$$(u+iv)^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \tag{七.3}$$

从而有：

$$(1+\frac{a+bi}{n})^n = [(1+\frac{a}{n}) + i\frac{b}{n}]^n \tag{七.4}$$

由于最后在证明到欧拉公式时需要让 $a=0$，且 $n\to\infty$。这里不妨设 $n>|a|$，由此我们用极坐标表示一下：

$$r_n = \left(\sqrt{[(1+\frac{a}{n})^2 + (\frac{b}{n})^2]}\right)^n \tag{七.5}$$

$$\theta_n = n\arctan\frac{\frac{b}{n}}{1+\frac{a}{n}} \tag{七.6}$$

我们先根据牛顿-墨卡托公式把极限写一下：:

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{a+ib}{n})^n = e^{a+ib} \tag{七.7}$$

我们先求 r_n 的极限（注意下面的推导使用了牛顿-墨卡托级数）：

$$\lim_{n\to\infty}\ln r_n = \lim_{n\to\infty}[\frac{n}{2}\ln(1+\frac{2a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2})] \tag{七.8}$$

$$= \lim_{n\to\infty}[\frac{n}{2}(\frac{2a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2})] = a \tag{七.9}$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} e^{\ln r_n} = e^a \tag{七.10}$$

再求 θ_n 的极限（注意，$\arctan x$ 的泰勒展开式在 $x\to 0$ 的时候也约等于 x）：

$$\lim_{n\to\infty}\theta_n = \lim_{n\to\infty}(n\arctan\frac{\frac{b}{n}}{1+\frac{a}{n}}) \tag{七.11}$$

$$= \lim_{n\to\infty}(n\frac{\frac{b}{n}}{1+\frac{a}{n}}) = b \tag{七.12}$$

因此：

$$e^{a+ib} = e^a(\cos b + i\sin b) \tag{七.13}$$

$$a=0 \quad\Longrightarrow\quad e^{ib} = \cos b + i\sin b \tag{七.14}$$

值得一提的是，复指数其实可以看做是一个螺旋线——当 b 不断变化的时候，$(\cos b + i\sin b)$ 就可以看做是在复平面不断地转圈。这样我们就可以推出另外一个结论——复对数有无穷多个。欧拉当时就发现了这个问题，并给了他的老师约翰·伯努利先生。但是他老师对对数的理解并不是很到位，所以也产生了一些令人啼笑皆非的故事。

八 总结

至此，复数的起源就可以告一段落了。当然，复数演化到复曲线、复函数，虽然形式上更丰富，但都没有更难以理解——复数，也就是二维数；复函数，就是二维 + 二维，即四维空间里的函数。牢记这一点，复数也不会是特别难以理解的东西。

参考文献

[1] Needham, Tristan. Visual complex analysis. Oxford University Press, 1998.

[2] Stillwell J . Mathematics and its History[J]. British Society for the History of Mathematics Newsletter, 2002, 22(2):77-77.

[3] https://zh.m.wikipedia.org/wiki/%E6%AC%A7%E6%8B%89%E5%85%AC%E5%BC%8F