B 样条曲线

Dezeming Family

2022 年 3 月 11 日

DezemingFamily 系列书和小册子因为是电子书，所以可以很方便地进行修改和重新发布。如果您获得了 DezemingFamily 的系列书，可以从我们的网站 [https://dezeming.top/] 找到最新版。对书的内容建议和出现的错误欢迎在网站留言。

目录

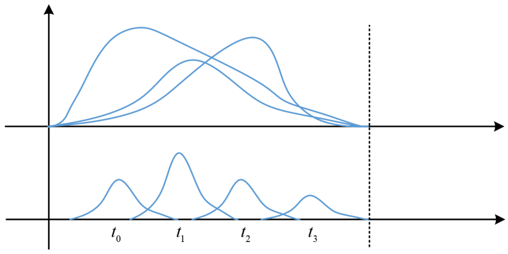
一　B 样条的引入

前面《贝塞尔曲线》讲过与贝塞尔曲线有关的内容，贝塞尔曲线有一个很不好的地方，在于给定一系列的控制点以后，要想分成多段贝塞尔曲线，很难保证 C^1 连续性（需要三个控制点共线）。所以通常对于 $n+1$ 个点采用 n 次 Bernstein 多项式。随着控制点数量变大，次数也越高；当一个控制点移动时，整条曲线都会发生变动，“牵一发而动全身”。

而样条曲线的好处在于分段性，具有一定的局部性。当变动一个控制点时，只会变动该点旁边有限段曲线。

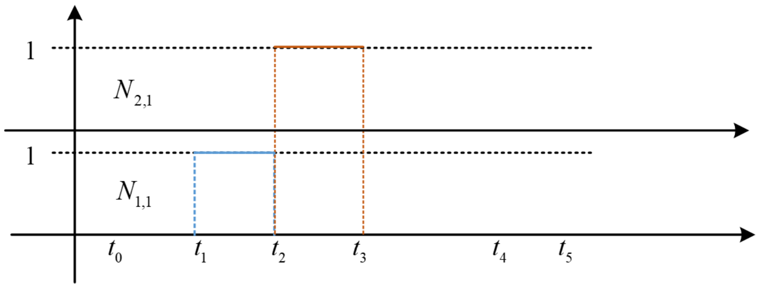
因此，我们需要的是具有局部性的基函数。法国工程师皮埃尔·贝塞尔 (Pierre Bézier) 于 1962 年发表贝塞尔曲线，de Boor 于 1972 年开始正式提出 B 样条这个概念，之后的 1974 年，B 样条开始在贝塞尔曲线中广泛使用。

局部性的基函数，只会影响到附近的局部区域值，例如下图所示：



图中，上边部分是全局性基，下面的部分是局部性基。可以看到，局部性基不会在整个参数区域都大于 0。

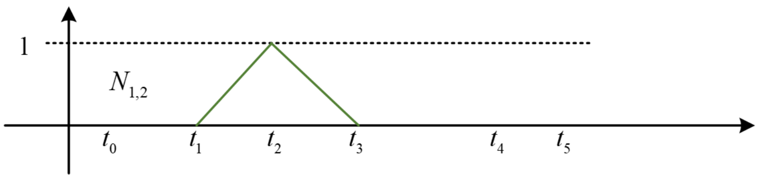
B 样条的定义方法最常见的是 de Boor 递归法。对于一阶的基函数定义如下：



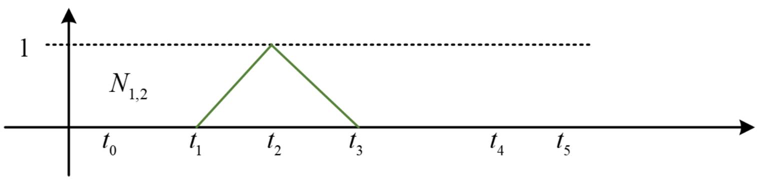
在每个区间里：

$$N_{i,1}(t)=\begin{cases}1, & t_i\leq t<t_{i+1}\\ 0, & otherwise\end{cases} \tag{一.1}$$

由递推公式可以得到（我们暂时先不给出递推公式，但其实就是相邻两个基的组合）：



可以看到，升阶之前，每段基只会落在一个区间里，而升阶以后，基就会落在两个区间里。我们再升阶一次：



基就在三个区间内有值。可以推出，$N_{i,k}(t)$ 在第 t_i 到第 t_{i+k} 区间内有值，称 $[t_i,t_{i+k}]$ 为 $N_{i,k}(t)$ 的支撑 (support)。

我们再来思考如何组合，我们希望 B 样条保持权性，也就是同一阶的所有基在某个 t 加起来的值都是 1。因此梯推式（升阶式）就需要使得升阶以后的函数保持这种特性。

现在，B 样条的提出和基本思路已经介绍完了，下一节我们介绍 B 样条的基本定义。

二 B 样条曲线的定义

我们设一共有 $n+1$ 个控制点 $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1 ... \mathbf{p}_n$，构成一个节点向量 (knot vector)：$T = (t_0, t_1, ..., t_n, ..., t_{n+k})$，则 k 阶 B 样条曲线就是：

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^{n} N_{i,k}(t) \cdot \mathbf{p}_i \tag{二.1}$$

我们把 $\mathbf{p}_i$ 叫做 de Boor 控制点。这里的 t_i 之间可以是均匀的，也可以不是均匀的。

可以看出，其实就是用几个控制顶点来控制基函数。

B 样条的推导公式：

$$\begin{aligned} N_{i,0}(t) &= \begin{cases} 1 & t_i \leq t \leq t_{i+1} \\ 0 & otherwise \end{cases} \\ N_{i,k}(t) &= \frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i} N_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k+1} - t}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t) \end{aligned} \tag{二.2}$$

这里的 t_i 不必像样条插值一样都取在 $[0, 1]$ 之间，而是可以任意取值，只需要保证 $t_{i+1} \geq t_i$。

对于均匀的 B 样条，也就是 $t_{i+1} - t_i$ 在所有区间都是相等的，这时，在每阶中，基函数只是其他基的平移和拷贝而已。

三 简单示例

为了简单，我们使用均匀 B 样条。设：

$$\begin{aligned} N_{i,0}(t) &= \begin{cases} 1 & i \leq t \leq i+1 \\ 0 & otherwise \end{cases} \\ N_{i,1}(t) &= (t-i)N_{i,0}(t) + (t_{i+2} - t)N_{i+1,0}(t) \\ N_{i,1}(t) &= tN_{i,0}(t) + (t_2 - t)N_{i+1,0}(t) \\ &= \begin{cases} t - i & i \leq t < i+1 \\ 2 - t + i & i+1 \leq t \leq i+2 \\ 0 & otherwise \end{cases} \end{aligned} \tag{三.1}$$

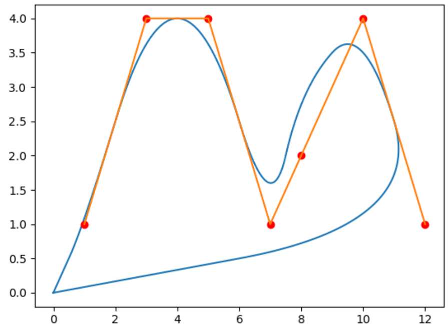
然后计算 $N_{i,2}$：

$$N_{i,2}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}u^2 & if\ i \leq t < i+1 \quad u = t - i \\ -u^2 + u + \frac{1}{2} & if\ i+1 \leq t < i+2 \quad u = t - (i+1) \\ \frac{1}{2}(1-u)^2 & if\ i+2 \leq t < i+3 \quad u = t - (i+2) \\ 0 & otherwise \end{cases} \tag{三.2}$$

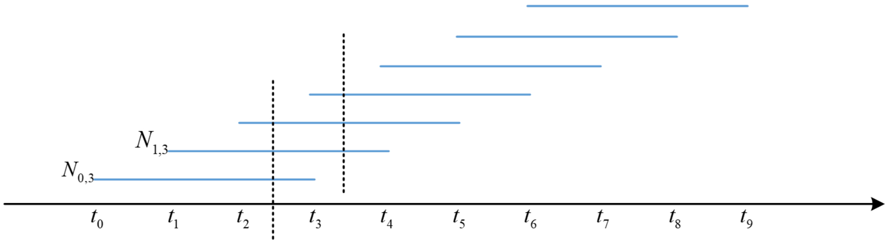
定义一系列的点：$[1, 1], [3, 4], [5, 4], [7, 1], [8, 3], [10, 4], [12, 1]$，然后把它们混合：

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^{6} \mathbf{p}_i N_{i,3}(t) \tag{三.3}$$

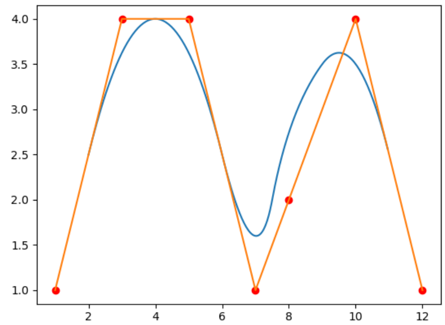
得到结果如下：



这个结果是正常的，因为对于端点而言，基函数值不会重合，即权和小于 1，因此会达到 $[0,0]$ 点。下图中，蓝线表示每个基 $N_{i,3}$ 的支撑区间，只有在支撑区间重叠为 3 时，才是正常的拟合区间。



对于 6 个控制顶点来说，只有 $[t_2, t_7]$ 这个区间是正常拟合的。



因此我们得到，对于 n 个控制点、k 次 B 样条，在 $[t_{k-1}, t_{n+1}]$ 区间内：

$$\sum_{i=0}^{n} N_{i,k}(t) = 1 \tag{三.4}$$

四　B 样条的连续性

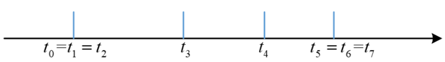
基函数 $N_{i,k}(t)$ 在节点 t_j 处是 C^{k-2} 连续的（这里指的是拼接处）。比如 3 次 B 样条在拼接处就是 C_1 连续的。因此在上一节的图中，在 t_2、t_3 等这些位置都是 C^1 连续的。

节点是可以重合的，即 t_i 等于 t_{i+1}。有节点重合的话，则在该点的光滑性就会降一阶（对于均匀 B 样条来说是不会重合的）。通过控制节点的重合度，就可以控制曲线的光滑性。

如果希望曲线的头尾两个控制端点被插值，则可以令：

$$\begin{aligned} &t_0 = t_1 = ... = t_{k-1} \\ &t_{n+1} = t_{n+2} = ... = t_{n+k} \end{aligned} \tag{四.1}$$

也就是让端点为 k 重，这样就会退化为贝塞尔曲线（这里 $k = 3$）：



贝塞尔曲线还有很多重要的性质，这些性质由数学家们进行证明和推广（见 [4]），能从直觉和简单的例子去理解的内容其实并不会很多，而我们常用的 B 样条是非均匀有理 B 样条曲线，也就是 NURBS 曲线。如果有空，我会专门写一个包含程序的进阶版，尽量直观上解释 B 样条的一些基本性质。

参考文献

[1] [https://www.bilibili.com/video/BV1NA411E7Yr?p=5]

[2] William H. Press, Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing. 3rd Sep.2007

[3] Steve Marschner, Peter Shirley. Fundamentals of Computer Graphics. fourth edition.

[4] Piegl L A , Tiller W . The NURBS book[M]. Springer Berlin Heidelberg, 1997.