NURBS 曲线

Dezeming Family

2022 年 3 月 12 日

DezemingFamily 系列书和小册子因为是电子书，所以可以很方便地进行修改和重新发布。如果您获得了 DezemingFamily 的系列书，可以从我们的网站 [https://dezeming.top/] 找到最新版。对书的内容建议和出现的错误欢迎在网站留言。

目录

一 有理多项式与贝塞尔曲线 1

二 NURBS 曲线 2

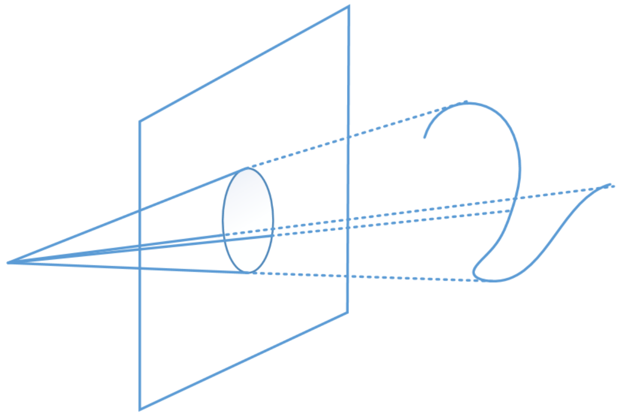
参考文献 2

一　有理多项式与贝塞尔曲线

NURBS 的概念其实牵扯了很多比较深入的数学原理（其实在贝塞尔曲线被提出以后，大量的研究就倾入到了 Bernstein 基中）。而且这方面的入门和学习教材比较少，Google 一搜都是很零碎的概念，而深入学习一门课程的时间成本太高，作为非专业研究人员则有些不值得。

书 [3] 是一个可以全面了解 NURBS 的不错的书（也需要一定的微分几何、场论的知识），也有大量例程，但如果我们不想自己动手实现里面的一些功能，则该书的意义并没有那么大。在我看完 [1] 以后，有了一些新的认识，所以决定整理一下。

Bezier 无法表示圆锥曲线（比如圆、椭圆和双曲线），而工业中圆形非常重要，尤其是需要精确表达圆弧，而不仅仅是去近似圆弧。在计算机图形学中，齐次坐标与投影可以将一个点变换到投影空间（齐次坐标空间）。投影空间的一条曲线投影到屏幕后，有可能构成一个圆形：



四维的齐次坐标 $[x, y, z, w]$ 投影到三维就是 $[\frac{x}{w}, \frac{y}{w}, \frac{z}{w}]$。

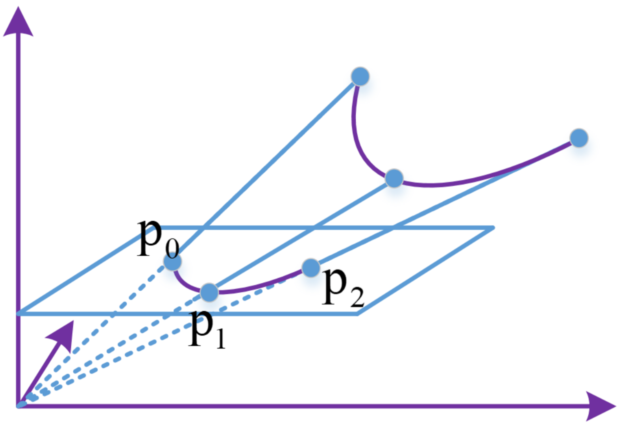
所谓投影，就是要除以一个分母，而有理其实就是“含有分母”。有理贝塞尔曲线：

$$\mathbf{f}(t) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{p}_i \frac{B_i^d(t)\omega_i}{\sum_{j=0}^{n} B_j^d(t)\omega_i} = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{p}_i q_i(t) \tag{一.1}$$

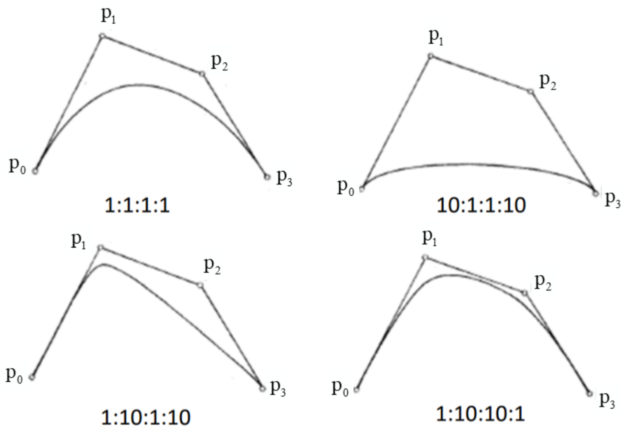
$$\sum_{i=0}^{n} q_i(t) = 1 \tag{一.2}$$

可以看到，如果权 w_i 都是相同的值的话，则就是一般的贝塞尔曲线。

对于二维的有理贝塞尔曲线，先将原来的控制点 $\mathbf{p}_i$ 变换到三维空间 $\mathbf{p}_i$，然后再投影到二维上：



权重还有一个好处，就是哪个控制点的权越大，则曲线越靠近哪个控制点：



二　NURBS 曲线

NURBS：Non-Uniform Rational B-Spline，即非均匀有理 B 样条，其实就是把多项式加权引入到了 B 样条中。引入多项式不可避免地会使 B 样条变得更复杂，但它带来的价值和意义远远高于了它的复杂性。

NURBS 表示为：

$$\mathbf{f}(t) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{p}_i \frac{N_i^d(t)\omega_i}{\sum_{j=0}^{n} N_j^d(t)\omega_i} = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{p}_i u_i(t) \tag{二.1}$$

$$\sum_{i=0}^{n} u_i(t) = 1 \tag{二.2}$$

权系数可以控制生成圆锥曲线（通过设置不同的权重 w_i 值来控制生成的曲线形状），具体的方法需要一定的数学证明，这里就暂不介绍（我也没学习过怎么证明，但是结论很简单，就是给定几个控制点和相关的权值）了，在一些 CAD 软件中（比如 MAYA），椭圆、圆弧就是通过 NURBS 来定义的。

参考文献

[1] [https://www.bilibili.com/video/BV1NA411E7Yr?p=5]

[2] William H. Press, Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing. 3rd Sep.2007

[3] Piegl L A , Tiller W . The NURBS book[M]. Springer Berlin Heidelberg, 1997.