三次参数样条曲线

Dezeming Family

2022 年 3 月 9 日

DezemingFamily 系列书和小册子因为是电子书，所以可以很方便地进行修改和重新发布。如果您获得了 DezemingFamily 的系列书，可以从我们的网站 [https://dezeming.top/] 找到最新版。对书的内容建议和出现的错误欢迎在网站留言。

目录

一　参数样条曲线的引入

一般的三次样条曲线无法构成一些非函数曲线，例如螺旋线，而三次参数样条曲线则可以构成这些曲线。

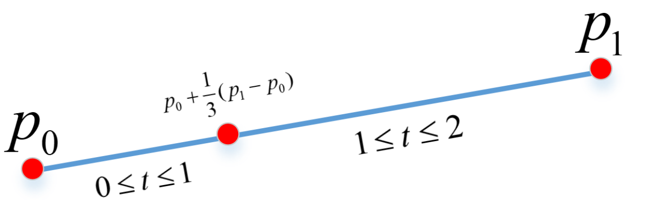
设二维点 (x,y) 表示为函数 $(x(t),y(t))$。对于 $x(t)$，定义 t 中一系列的点（参考《平面曲线参数拟合》），找到对应 (t_i,x_i)，然后进行参数曲线求解（和求解三次样条曲线）。

二　参数连续性与几何连续性的直观解释

对于样条函数，需要满足 C^2 连续性，也就是型值点左右两边的两个三次多项式在该点处的二阶导相等。

参数连续性的问题在于，如果选择不同的参数来描述同一个曲线，可能得到的曲线连续性会变化。

我以 [2] 给出的例子为例，一条直线从 p_0 到 p_1，我们用两段直线来表示：



参数方程可以写为：

$$\phi(t)=\begin{cases}p_0+\frac{p_1-p_0}{3}t & 0\le t\le 1\\ p_0+\frac{p_1-p_0}{3}+\frac{2(p_1-p_0)}{3}(t-1) & 1\le t\le 2\end{cases} \tag{二.1}$$

$$\phi'(1-)\neq\phi'(1+)$$

上面的参数方程一阶导并不连续。但是如果我们把 t 的区间分为 $(0,\frac{2}{3})$ 和 $(\frac{2}{3},2)$：

$$\phi(t)=\begin{cases}p_0+\frac{p_1-p_0}{2}t & 0\le t\le \frac{2}{3}\\ p_0+\frac{p_1-p_0}{3}+\frac{(p_1-p_0)}{2}(t-\frac{2}{3}) & \frac{2}{3}\le t\le 2\end{cases} \tag{二.2}$$

$$\phi'(\frac{2}{3}-)\neq\phi'(\frac{2}{3}+)$$

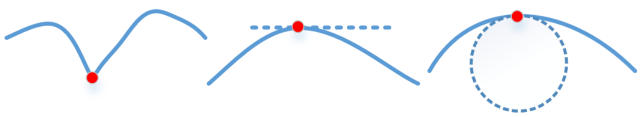
可以看到，明明是一条连续的线段，但是因为选择了不同的参数表示方法，所以得到参数表达式一个一阶导是连续的，一个一阶导并不是连续的。

我们可以理解为，参数连续性是一个非常严格的限制。有时候，某个曲线就算不满足参数连续性，它看起来似乎也是连续的（比如这条线段），我们定义几何连续性 G 来描述连续的曲线：只要存在一种变换，使得 $t=\rho(s)$，$a_1\le s\le b_1$，使得 $\phi(\rho(s))\in C^n[a_1,b_1]$，且满足 $\frac{d\phi(\rho(s))}{ds}\neq 0$，则称 $\phi(t)$ 在 $(a\le t\le b)$ 是 n 阶几何连续的曲线：

$$\phi(t)\in G^n[a,b] \tag{二.3}$$

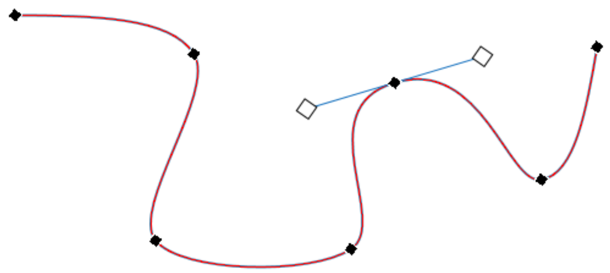
至于为什么需要保证 $\frac{d\phi(\rho(s))}{ds}\neq 0$，是因为防止曲线出现奇点（概念比较复杂，详见代数几何书籍）。

G^0 连续表示两个曲线有公共的连接端点；G^1 表示连接处切线方向连续，但切线大小不一定相等；G^2 表示两个曲线连接处有公共的曲率圆，也就是曲率连续。



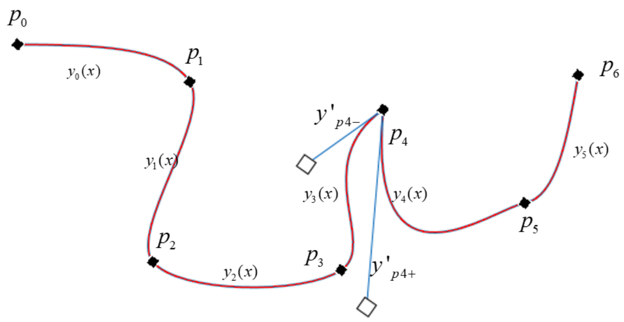
三　如何实现 G^2 连续

参数曲线的 G^2 连续我们早已解释过，就是求 $(x(t),y(t))$ 的参数曲线。



四　如何实现 G^0 连续

如果要实现 G_0 连续，我们以下图为例：



这样就能根据 P_4 点列一个式子：

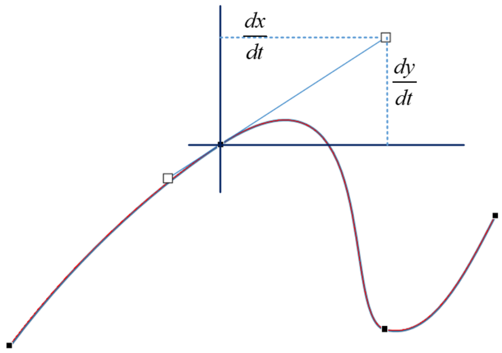
$$
\begin{aligned}
y_3(x_{p_4}) &= y_{p_4} \\
y_3(x_{p_3}) &= y_{p_3} \\
y_3'(x_{p_3}) &= y_{p_3+}' \\
y_3'(x_{p_4}) &= y_{p_4-}'
\end{aligned} \tag{四.1}
$$

如果我们早就生成好了 G^2 连续的曲线，则 y_{p_3+}' 就是已知的。对于 Office 的曲线功能就是如此，我们定义插值点，生成 G^2 连续的曲线，然后再自己进行编辑。上式一共有四个方程和四个未知数（三次函数有四个未知数），因此可以进行求解。

现在我们来看参数曲线。对于参数曲线，就要写为：

$$
\begin{aligned}
x_i(t) &= a_i + b_i t + c_i t^2 + d_i t^3 \\
x_3(x_{p_4}) &= x_{p_4} \\
x_3(x_{p_3}) &= x_{p_3} \\
y_i(t) &= e_i + f_i t + g_i t^2 + h_i t^3 \\
y_3(y_{p_4}) &= y_{p_4} \\
y_3(y_{p_3}) &= y_{p_3}
\end{aligned} \tag{四.2}
$$

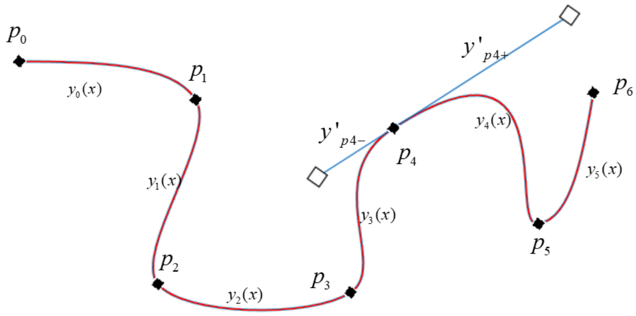
我们需要知道参数曲线的导数。当我们有参数曲线的时候，根据参数方程：$\frac{dx}{dt}$ 就是切线在 x 方向的投影长度，$\frac{dy}{dt}$ 就是切线在 y 方向的投影长度。（注意导数可以计算为 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt}$。）



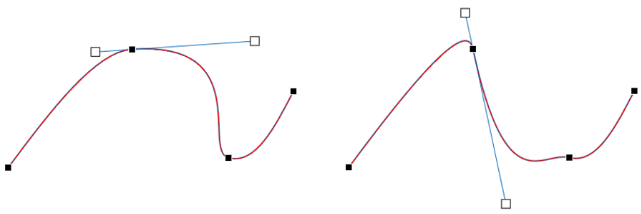
这样就能得到求解方程所有需要的条件了。

五　如何实现 G^1 连续

实现 G_1 连续，以下图为例：



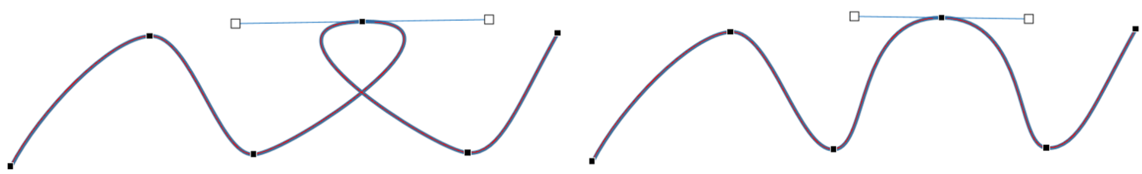
对于 G_0 连续，当我们变化 y'_{p4+} 时，$y_3(x)$ 曲线不会发生任何变化。但当 G_1 连续时，当我们变化 y'_{p4+} 时，$y_3(x)$ 曲线为了保证和 $y_4(x)$ 保持一阶连续，则需要让 $y'_{p4+} = \lambda y'_{p4-}$。在 Office 中，会保持 y'_{p4-} 切线的大小不变，只改变方向：



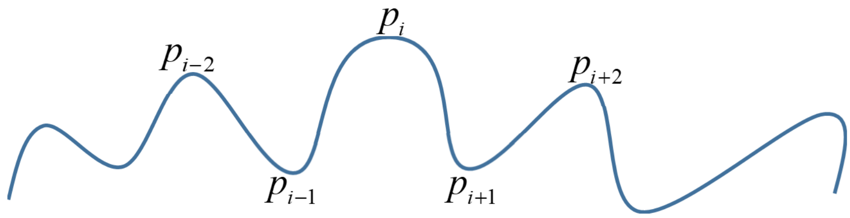
我们需要更新 $y_3(x)$ 和 $y_4(x)$ 两段曲线。

六　G^2 连续中，插值点变化时

对于 G^2 连续，当插值点处的切线变化时，只会影响到左右两段线段：



但是当插值点位置发生变换时，我们需要重新计算整条曲线。但是由于一些特殊的性质，其实只会更新插值点左边两条线段和右边两条线段。即如果 (x_{p_3}, y_{p_3}) 的位置变了，则 $y_1(x)$、$y_2(x)$、$y_3(x)$ 和 $y_4(x)$ 这四条曲线都会发生变化。这可以理解为当 p_i 位置改变的时候，p_{i-2} 和 p_{i+2} 可以构成中间四条曲线的 G^2 条件：



参考文献

[1] William H. Press, Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing. 3rd Sep.2007

[2] [https://www.bilibili.com/video/BV1NA411E7Yr?p=4]