平面曲线的参数拟合

Dezeming Family

2022 年 3 月 8 日

DezemingFamily 系列书和小册子因为是电子书，所以可以很方便地进行修改和重新发布。如果您获得了 DezemingFamily 的系列书，可以从我们的网站 [https://dezeming.top/] 找到最新版。对书的内容建议和出现的错误欢迎在网站留言。

目录

一　平面参数曲线

对于平面曲线，参数方法一般可以表示为：

$$
\begin{cases}
x = x(t) \\
y = y(t)
\end{cases}
\tag{一.1}
$$

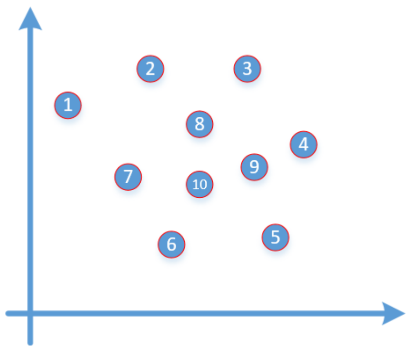
在拟合时，需要选择一些基函数 $B_i(t)$，使得：

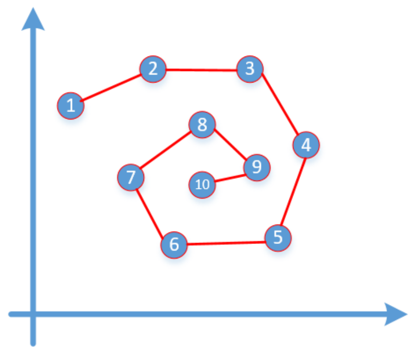
$$
\begin{cases}
x = x(t) = \sum_{i=0}^{m} a_i B_i(t) \\
y = y(t) = \sum_{i=0}^{m} b_i B_i(t)
\end{cases}
\tag{一.2}
$$

比如使用幂基函数：

$$
B_i(t) = t^i \tag{一.3}
$$

假如现在平面上已经有了一些点集（序号是顺序）：





最简单和直白的方式是连起来，如上图右。但是这样不够平滑，我们一般会进行拟合。

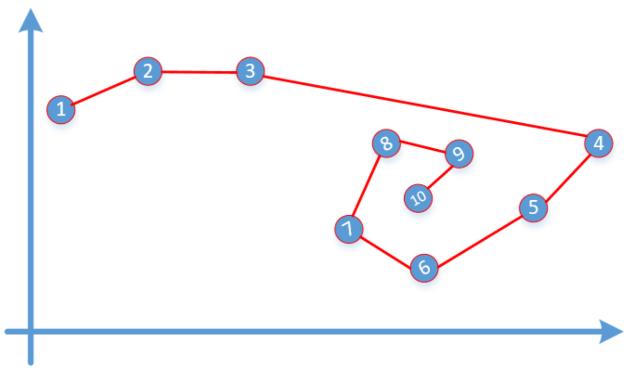
拟合方法一般使用最小二乘法，可以将 $x(t)$ 和 $y(t)$ 分别进行拟合。对于 $i \in [1, 2, ..., n]$:

$$
\begin{cases}
x_i = \sum_{i=0}^{m} a_i B_i(t_i) \\
y_i = \sum_{i=0}^{m} b_i B_i(t_i)
\end{cases}
\tag{一.4}
$$

我们需要确定 t 的取值位置。比如令 t_i 均匀地分布在 $[0, 1]$ 之间（分布在任意的 $[a, b]$ 之间都可以）：

$$
t_i = \frac{i}{n} \tag{一.5}
$$

但是这样往往不够细致，比如如果有两个点 p_3 和 p_4 距离比较远，那么 t_3 和 t_4 也应该要比较远：



因此可以根据两点距离除以总距离来生成不均匀的 t_i:

$$
\begin{aligned}
t_1 &= 0 \\
t_i &= \frac{\sum_{k=1}^{i} ||D_k - D_{k-1}||}{\sum_{k=1}^{n} ||D_k - D_{k-1}||} \qquad 2 \le i \le n
\end{aligned}
\tag{一.6}
$$

二　拟合方法

当我们使用基函数时，可以写为一个矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} 1 & B_1(t_1) & B_2(t_1) & ... & B_m(t_1) \\ 1 & B_1(t_2) & B_2(t_2) & ... & B_m(t_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & B_1(t_{n-1}) & B_2(t_{n-1}) & ... & B_m(t_{n-1}) \\ 1 & B_1(t_n) & B_2(t_n) & ... & B_m(t_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_m & b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_{n-1} & y_{n-1} \\ x_n & y_n \end{bmatrix} \tag{二.1}$$

$$write\ as\ :\ \mathbf{AX} = \mathbf{P} \tag{二.2}$$

令 $m = n-1$，$\mathbf{A}$ 是一个 $n \times n$ 的矩阵，可以直接求解线性系统，但是此时有可能 $\mathbf{A}$ 是一个很接近奇异矩阵的矩阵，因此求逆会有很大的误差。

当 $n < m$ 时，可以应用最小二乘法。我们计算拟合的误差函数：

$$E = \sum_{i=1}^{n} \Big|\Big| \begin{pmatrix} x(t_i) \\ y(t_i) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \Big|\Big|^2 \tag{二.3}$$

$$E = (\mathbf{AX} - \mathbf{Y})^T(\mathbf{AX} - \mathbf{Y}) \tag{二.4}$$

对误差函数进行求导，令导数为 0，得到：

$$(\mathbf{A}^T\mathbf{A})\mathbf{X} = (\mathbf{A}^T)\mathbf{P}$$

$$\mathbf{X} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{A}^T)\mathbf{P} \tag{二.5}$$

参考文献

[1] nothing