细分曲线

Dezeming Family

2022 年 3 月 14 日

DezemingFamily 系列书和小册子因为是电子书，所以可以很方便地进行修改和重新发布。如果您获得了 DezemingFamily 的系列书，可以从我们的网站 [https://dezeming.top/] 找到最新版。对书的内容建议和出现的错误欢迎在网站留言。

目录

一 细分曲线 **1**

二 逼近型细分曲线 **1**

2 1 Chaikin 割角法 1

2 2 均匀三次 B 样条细分 2

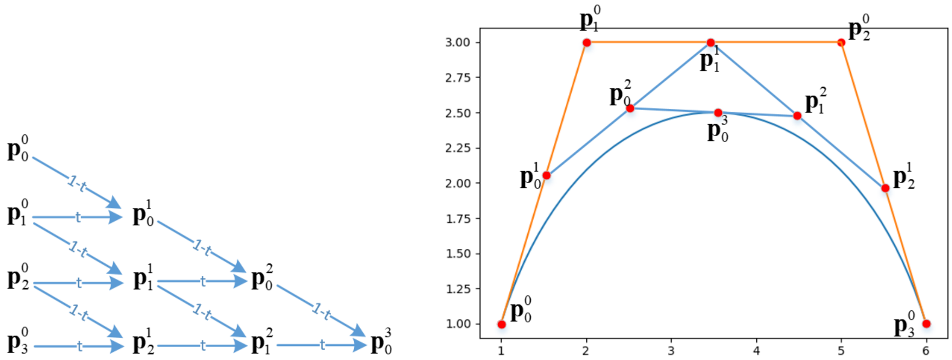
三 插值型细分曲线 **2**

3 1 四点插值型细分方法 2

参考文献 **2**

一　细分曲线

最直观的细分曲线可以理解为“打磨”的过程，只是数学和工程上可以根据自定义的性质来选择打磨的过程。回想一下 De Casteljau 算法，就像类似割角一样：

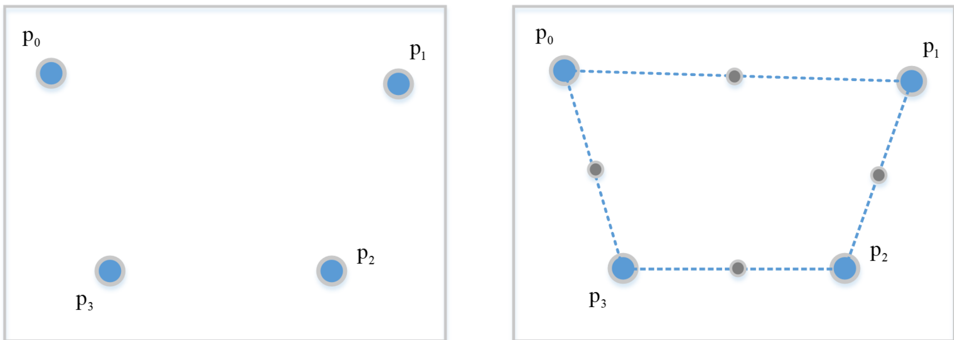


细分也分为两种，一种是逼近型细分，另一种是插值型细分。对于逼近型，不要求细分后的曲线正好能插值到控制点，而插值型细分则要求曲线能插值到控制点上。

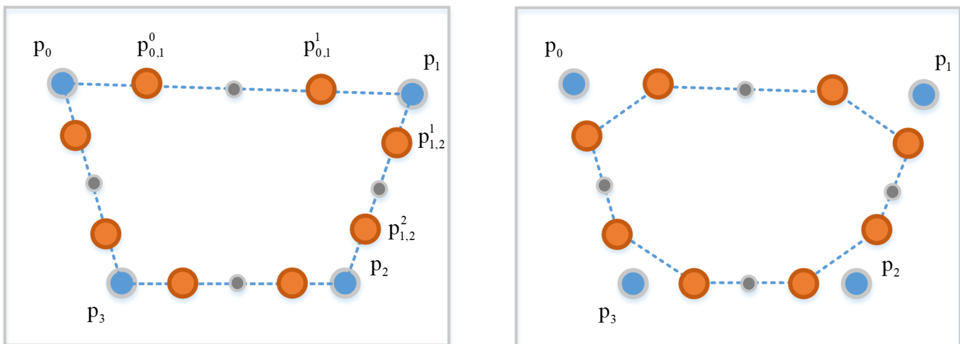
二　逼近型细分曲线

2 1　Chaikin 割角法

我们先介绍 Chaikin 割角法：



上图左表示四个控制点，我们把这四个控制点连起来，然后找其中点，之后再找到中点与各个顶点之间的中点，也就是下图中的 $\mathbf{p}_{0,1}^{0}$ 和 $\mathbf{p}_{0,1}^{1}$ 这些点：



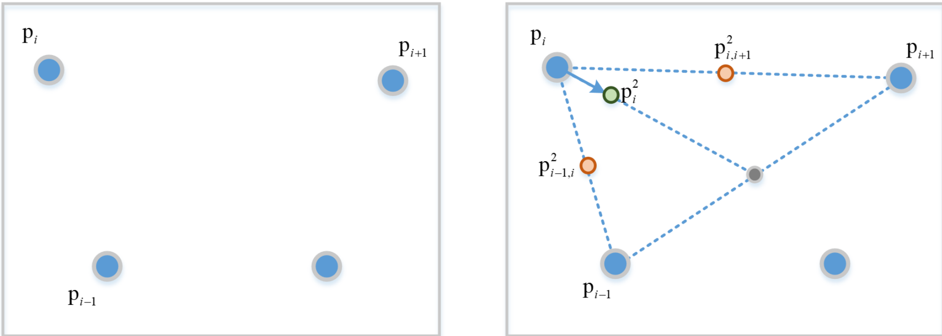
生成式可以写为：

$$\mathbf{p}_{i,j}^{i} = \frac{3}{4}\mathbf{p}_i + \frac{1}{4}\mathbf{p}_j \tag{二.1}$$

这些新边点和老的顶点再生成新的新边点，这样以此类推（通过递归的方法）。当我们思考出一种细分方案时，我们需要证明细分曲线是具有一定条件下的一定连续性的，这样在工业界中才会具有一定的应用价值。Chaikin 逼近方法当递归次数趋近于无穷时，曲线为二次均匀 B 样条曲线，在节点处 C^1 连续，在其他点处 C^∞ 连续。

2 2 均匀三次 B 样条细分

均匀三次 B 样条曲线细分的方法如下图：



其中，$\mathbf{p}_i^2$ 是对应于 $\mathbf{p}_i$ 点生成的新点，$\mathbf{p}_{i-1,i}^2$ 是对应于边 $\mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{p}_i$ 生成的新点，公式为：

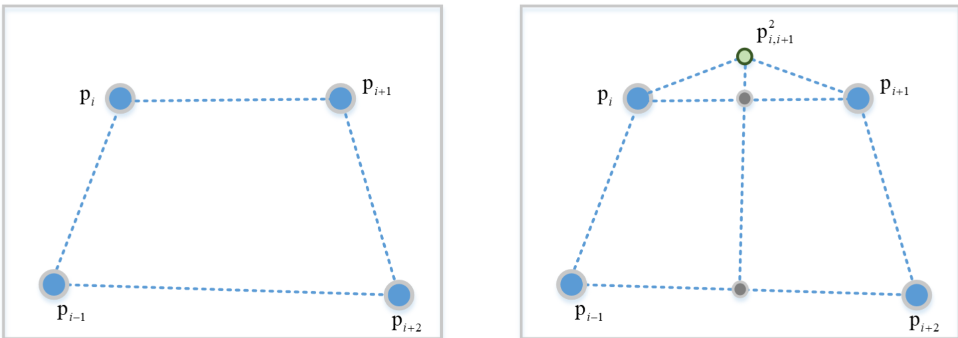
$$\mathbf{p}_i^2 = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_{i-1} + \mathbf{p}_{i+1}) \times \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\mathbf{p}_i \tag{二.2}$$

其中，$\frac{1}{2}(\mathbf{p}_{i-1} + \mathbf{p}_{i+1})$ 就是上图中的灰色点。

三 插值型细分曲线

3 1 四点插值型细分方法

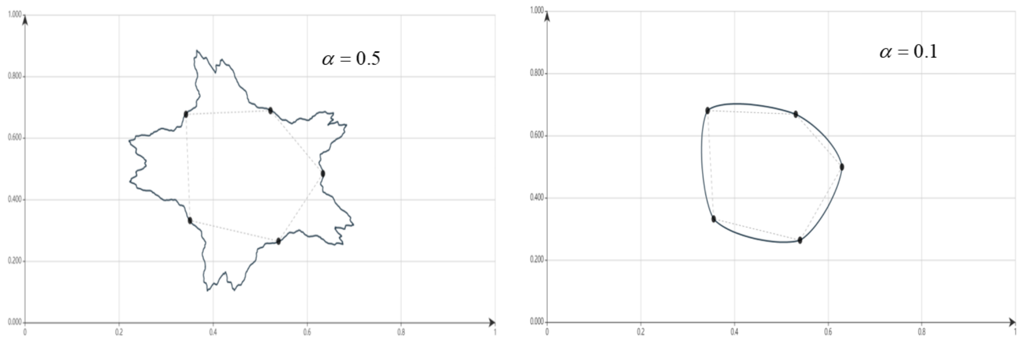
四点插值算法示意图如下：



相当于在两个边凸起一个点。插值公式为：

$$\mathbf{p}_{i,i+1}^2 = \frac{\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i+1}}{2} + \alpha(\frac{\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i+1}}{2} - \frac{\mathbf{p}_{i-1} - \mathbf{p}_{i+2}}{2}) \tag{三.1}$$

根据论文 [1] 所述，只要 $\alpha \in (0, \frac{1}{8})$，则曲线就是光滑的，否则就会构成分型曲线：



3 2 小结

还有很多逼近和插值的方法也都可以去尝试，这些方法的光滑性证明也可以在不少中英文文献资料中找到。

参考文献

[1] Dyn N , Levin D , Gregory J A . A 4-point interpolatory subdivision scheme for curve design[J]. Computer Aided Geometric Design, 1987, 4(4):257-268.