Haar 离散小波分析

Dezeming Family

2022 年 4 月 24 日

DezemingFamily 系列书和小册子因为是电子书，所以可以很方便地进行修改和重新发布。如果您获得了 DezemingFamily 的系列书，可以从我们的网站 [https://dezeming.top/] 找到最新版。对书的内容建议和出现的错误欢迎在网站留言。

目录

一　h_n 与 g_n

1 1　正交小波与离散分析

对于正交小波：

$$\alpha_{(j,k)} = \left\langle f(t), \psi_{(j,k)}(t) \right\rangle \tag{一.1}$$

我们只需要分析离散的 $\alpha_{(j,k)}$，就相当于对整个信号的小波变换进行分析。

对于离散信号，我们的值本身就是离散的（或者可以理解为分段常量函数）因此可以直接从尺度方程和小波方程的表示来入手分析。

1 2　基本定义

在多分辨分析中（我们还没有介绍，所以暂时不需要深入了解），尺度方程和小波方程可以写为：

$$\phi(t) = \sum_n h_n \sqrt{2}\phi(2t-n) = \sqrt{2}\sum_n h_n \phi(2t-n) \tag{一.2}$$

$$\psi(t) = \sum_n g_n \sqrt{2}\phi(2t-n) = \sqrt{2}\sum_n g_n \phi(2t-n) \tag{一.3}$$

我们回顾一下《从 Haar 小波认识小波空间》介绍的扩张方程：

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\phi(2^j t - k)$$

$$\phi_{j,k}(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\phi_{j+1,2k}(t) + \frac{\sqrt{2}}{2}\phi_{j+1,2k+1}(t) \tag{一.4}$$

$$\psi_{j,k}(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\phi_{j+1,2k}(t) - \frac{\sqrt{2}}{2}\phi_{j+1,2k+1}(t) \tag{一.5}$$

以及重建：

$$\phi_{j+1,2k}(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\phi_{j,k}(t) + \frac{\sqrt{2}}{2}\psi_{j,k}(t) \tag{一.6}$$

$$\phi_{j+1,2k+1}(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\phi_{j,k}(t) - \frac{\sqrt{2}}{2}\psi_{j,k}(t) \tag{一.7}$$

例如：

$$\phi_{(0,0)}(t) = \phi(t) = 2^{\frac{1}{2}}\phi(2t-0) + 2^{\frac{1}{2}}\phi(2t-1) \tag{一.8}$$

$$\tag{一.9}$$

也就是说，对于 Haar 尺度方程：

$$h_n = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}, & n = 0,1 \\ 0, & otherwise \end{cases} \tag{一.10}$$

$$\phi(t) = \sum_n h_n \sqrt{2}\phi(2t-n) \tag{一.11}$$

同理：

$$g_n = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}, & n = 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & n = 1 \\ 0, & otherwise \end{cases} \tag{一.12}$$

$$\psi(t) = \sum_n g_n \sqrt{2}\phi(2t-n) \tag{一.13}$$

由于 $\phi(t-k)_{k\in\mathbb{Z}}$ 可以构成 $\mathcal{V}_0$ 空间的标准正交基，所以 $||\phi(t)||^2=1$。而且 $||\sqrt{2}\phi(2t-n)||^2=1$，于是可以感受到（我们不详细证明，而是去感受和理解）：

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}|h_n|^2=1 \tag{一.14}$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}|g_n|^2=1 \tag{一.15}$$

我们用向量来描述：

$$\mathbf{h}=[h_0,h_1]^T=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix} \tag{一.16}$$

$$\mathbf{g}=[g_0,g_1]^T=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix} \tag{一.17}$$

1 3 举例

假如我们有一个信号表示为 $f(t)=2\times\phi(t)\in\mathcal{V}_0$，则该信号还可以表示为 $\mathcal{V}_1$ 内的信号：

$$f(t)=2\times\big(\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2}\phi(2t-0)+\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2}\phi(2t-1)\big)$$

假如有一个 $\mathcal{V}_1$ 内的信号：

$$\begin{aligned}f_1(t)&=2\times\phi(2t-0)+3\times\phi(2t-1)\\&=\sqrt{2}\times\sqrt{2}\phi(2t-0)+\frac{3}{\sqrt{2}}\times\sqrt{2}\phi(2t-1)\\&=a_0\times\sqrt{2}\phi(2t-0)+a_1\times\sqrt{2}\phi(2t-1)\end{aligned} \tag{一.18}$$

投影到 $\mathcal{V}_0$ 和 $\mathcal{W}_0$ 空间分别为：

$$\begin{aligned}f_0(t)&=\frac{5}{2}\times\phi(t)=b_0\times\phi(t)\\g_0(t)&=-\frac{1}{2}\times\psi(t)=c_0\times\psi(t)\end{aligned}$$

当有一个 $\mathcal{V}_1$ 内的信号：

$$\begin{aligned}f_1(t)&=2\times\phi(2t-2)+3\times\phi(2t-3)\\&=\sqrt{2}\times\sqrt{2}\phi(2t-2)+\frac{3}{\sqrt{2}}\times\sqrt{2}\phi(2t-3)\\&=a_0\times\sqrt{2}\phi(2t-2)+a_1\times\sqrt{2}\phi(2t-3)\end{aligned} \tag{一.19}$$

投影到 $\mathcal{V}_0$ 和 $\mathcal{W}_0$ 空间分别为：

$$\begin{aligned}f_0(t)&=\frac{5}{2}\times\phi(t-1)=b_1\times\phi(t-1)\\g_0(t)&=-\frac{1}{2}\times\psi(t-1)=c_1\times\psi(t-1)\end{aligned}$$

于是：

$$\begin{aligned}f_1(t)&=\sum_k a_k\phi_{(1,k)}(t)\\f_0(t)&=\sum_k b_k\phi_{(0,k)}(t)\\g_0(t)&=\sum_k c_k\psi_{(0,k)}(t)\end{aligned}$$

其中：

$$b_k = \mathbf{h}^T \begin{bmatrix} a_{2k} \\ a_{2k+1} \end{bmatrix} \tag{一.20}$$

$$c_k = \mathbf{g}^T \begin{bmatrix} a_{2k} \\ a_{2k+1} \end{bmatrix} \tag{一.21}$$

同时，我们还可以得到：

$$a_{2k} = \mathbf{h}^T \begin{bmatrix} b_k \\ c_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_k \\ c_k \end{bmatrix} \tag{一.22}$$

$$a_{2k+1} = \mathbf{g}^T \begin{bmatrix} b_k \\ c_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_k \\ c_k \end{bmatrix} \tag{一.23}$$

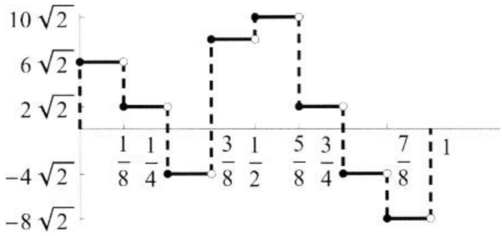
二　信号的离散 Haar 小波变换

2 1　信号分解

我们以 [1] 的 Example3.9 为例，来详细介绍离散 Haar 小波变换。

$$\begin{aligned} f_3(t) &= \sum_{k=0}^{7} a_k \phi_{(3,k)}(t) \\ &= 3\phi_{(3,0)}(t) + \phi_{(3,1)}(t) - 2\phi_{(3,2)}(t) + 4\phi_{(3,3)}(t) \\ &\quad + 5\phi_{(3,4)}(t) + \phi_{(3,5)}(t) - 2\phi_{(3,6)}(t) - 4\phi_{(3,7)}(t) \end{aligned} \tag{二.1}$$

图示为：



投影到 $\mathcal{V}_2$ 和 $\mathcal{W}_2$ 空间为：

$$\begin{aligned} f_2(t) &= 2\sqrt{2}\phi_{(2,0)}(t) + \sqrt{2}\phi_{(2,1)}(t) + 3\sqrt{2}\phi_{(2,2)}(t) - 3\sqrt{2}\phi_{(2,3)}(t) \\ g_2(t) &= \sqrt{2}\psi_{(2,0)}(t) - 3\sqrt{2}\psi_{(2,1)}(t) + 2\sqrt{2}\psi_{(2,2)}(t) + \sqrt{2}\psi_{(2,3)}(t) \end{aligned}$$

可以把上面写成矩阵的形式：

$$\left[\begin{array}{cccccccc} h_0 & h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_0 & h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_0 & h_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_0 & h_1 \\ \hdashline g_0 & g_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_0 & g_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_0 & g_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_0 & g_1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \hdashline c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{array}\right] \tag{二.2}$$

这个矩阵是一个正交矩阵（如果系数有复数，就是酉矩阵）。

2 2　简化表示

把信号分解式 Equ.二.2写为：

$$\left[\begin{array}{c}\mathbf{H}\\ \hdashline \mathbf{G}\end{array}\right]\mathbf{a}=\left[\begin{array}{c}\mathbf{b}\\ \hdashline \mathbf{c}\end{array}\right] \tag{二.3}$$

对该矩阵进行转置（为了适用性更广，这里写为共轭转置），就可以得到（注意下式不但可以通过对小波分解和合成的原理得到，也可以通过正交矩阵的性质来得到）：

$$\left[\begin{array}{c}\mathbf{H}\\ \hdashline \mathbf{G}\end{array}\right]^{*}=\left[\begin{array}{c:c}\mathbf{H}^{*} & \mathbf{G}^{*}\end{array}\right] \tag{二.4}$$

$$\left[\begin{array}{c:c}\mathbf{H}^{*} & \mathbf{G}^{*}\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}\mathbf{b}\\ \hdashline \mathbf{c}\end{array}\right]=\mathbf{a} \tag{二.5}$$

我们用 $\mathbf{W}_N$ 来表示有 N 个支撑段的矩阵（在这个例子中，$N=8$，即对于 $a_k, k\in\mathbb{Z}$ 中有 8 个 k 对应的 a_k 不等于 0）：

$$\mathbf{W}_N=\left[\begin{array}{c}\mathbf{H}_{N/2}\\ \hdashline \mathbf{G}_{N/2}\end{array}\right] \tag{二.6}$$

2 3　一些展望

尺度方程和小波方程：

$$\phi(t)=\sqrt{2}\sum_n h_n\phi(2t-n) \tag{二.7}$$

$$\psi(t)=\sqrt{2}\sum_n g_n\phi(2t-n) \tag{二.8}$$

以及扩张方程和重建：

$$\phi_{j,k}(t)=2^{j/2}\phi(2^j t-k)$$

$$\phi_{j,k}(t)=\frac{\sqrt{2}}{2}\phi_{j+1,2k}(t)+\frac{\sqrt{2}}{2}\phi_{j+1,2k+1}(t) \tag{二.9}$$

$$\psi_{j,k}(t)=\frac{\sqrt{2}}{2}\phi_{j+1,2k}(t)-\frac{\sqrt{2}}{2}\phi_{j+1,2k+1}(t) \tag{二.10}$$

$$\phi_{j+1,2k}(t)=\frac{\sqrt{2}}{2}\phi_{j,k}(t)+\frac{\sqrt{2}}{2}\psi_{j,k}(t) \tag{二.11}$$

$$\phi_{j+1,2k+1}(t)=\frac{\sqrt{2}}{2}\phi_{j,k}(t)-\frac{\sqrt{2}}{2}\psi_{j,k}(t) \tag{二.12}$$

Haar 小波尺度函数系数只有 h_0 和 h_1 有值，所以变换稍显简单。对于其他小波，例如 Daubechies 小波的离散变换，一般有：

$$b_0=\sum_{n=0}^{L}h_n a_n$$

$$b_1=\sum_{n=0}^{L}h_n a_{n+2}$$

$$b_2=\sum_{n=0}^{L}h_n a_{n+4}$$

写成矩阵形式就是：

$$
\left[\begin{array}{cccccccc}
h_0 & h_1 & ... & h_L & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & h_0 & h_1 & ... & h_L & 0 & 0 \\
 & & & ... & & & & \\
\hdashline
g_0 & g_1 & ... & g_L & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & g_0 & g_1 & ... & g_L & 0 & 0 \\
 & & & ... & & & &
\end{array}\right]
\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \end{bmatrix}
=
\left[\begin{array}{c} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \hdashline c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \end{array}\right]
\tag{二.13}
$$

为什么每行依次要右移 2 个单位，这与小波是“正交二进小波”有关，大家应该也能有所感觉。具体的推导等我们完成多分辨分析以后，我就会详细地介绍，这里也只是先埋个伏笔（其实就是著名的塔式分解算法），免得大家会误认为离散小波变换的矩阵是这种形式：

$$
\begin{bmatrix}
h_0 & h_1 & ... & h_L & 0 & 0 & ... & 0 & ... \\
0 & 0 & ... & 0 & h_0 & h_1 & ... & h_L & ... \\
 & & & & ... & & & &
\end{bmatrix}
\tag{二.14}
$$

另外，还能否构成正交矩阵吗？这就需要涉及”Warp” 操作了，有点类似于循环卷积，我们以后会详细介绍。

我们现在暂时也不要求完全从小波分析的角度去理解离散 Haar 小波变换，因为有些概念很难解释清楚。等到我们讲完多分辨分析与小波构造分解算法以后，这些内容就都会变得很清晰明确了。

参考文献

[1] Ruch D K , Fleet P V . Wavelet Theory: An Elementary Approach with Application[M]. John Wiley & Sons, 2009.

[2] 冉启文. 小波变换与分数傅里叶变换理论及应用 [M]. 哈尔滨工业大学出版社, 2001.