z 变换

Dezeming Family

2022 年 4 月 12 日

DezemingFamily 系列书和小册子因为是电子书，所以可以很方便地进行修改和重新发布。如果您获得了 DezemingFamily 的系列书，可以从我们的网站 [https://dezeming.top/] 找到最新版。对书的内容建议和出现的错误欢迎在网站留言。

目录

一　z 变换的引入

LTI 系统对复指数信号的响应仍然是一个复指数信号，只是幅度会有变化。如果系统对一个信号的输出响应仅仅是一个常数乘以输入，那么这个信号就是系统的特征函数 (eigenfunction)，而幅度就是系统的特征值 (eigenvalue)（注意这里的描述，和线性代数中是基本一致的）。我们设 $h(t)$ 和 $h[n]$ 分别是连续时间和离散时间系统的单位冲激响应。

1 1　连续时间

对于连续时间而言，设输入 $x(t)=e^{st}$，则：

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau \\ &= e^{st}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau \\ &= H(s)e^{st} \end{aligned} \tag{一.1}$$

其中，$H(s)$ 与 t 无关，对于确定的 s 来说是一个定值。

我们简写为：

$$input:\ e^{st} \qquad\qquad output:\ H(s)e^{st} \tag{一.2}$$

1 2　离散时间

对于离散时间而言：

$$input:\ z^{n} \qquad\qquad output:\ H(z)z^{n} \tag{一.3}$$

对于离散时间而言，设输入 $x[n]=z^n$，则：

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{n-k} \\ &= z^n\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{-k} \\ &= H(z)z^n \end{aligned} \tag{一.4}$$

其中，$H(z)$ 与 n 无关，对于确定的 z 来说是一个定值。

我们简写为：

$$input:\ z^{n} \qquad\qquad output:\ H(z)z^{n} \tag{一.5}$$

1 3　z 变换的引入

对于离散情况下，令 $z=e^{j\omega}$，就得到了傅里叶变换：

$$y[e^{j\omega}] = H(e^{j\omega})e^{j\omega n} \tag{一.6}$$

我们回到用 z 表示的状态，定义：

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{-k} \tag{一.7}$$

由此，对信号 $x[n]$，定义其 z 变换为：

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} \tag{一.8}$$

二　z 变换的收敛域

当 $|z| = 1$ 时，即 $z = e^{i\omega}$，则此时 $X(z)$ 就是离散时间傅里叶变换。当 $|z| \neq 1$ 时，此时 $X(z)$ 就是 z 变换。我们把 z 表示为：

$$z = re^{i\omega} \tag{二.1}$$

其中，r 是 z 的模，ω 是 z 的相角。于是得到：

$$\begin{aligned} X(z) = X(re^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n](re^{i\omega})^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (x[n]r^{-n}) e^{-i\omega n} \end{aligned} \tag{二.2}$$

即相当于：

$$X(re^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[n]r^{-n}\} \tag{二.3}$$

如果要求 $x[n]$ 的 z 变换收敛，相当于要求 $x[n]r^{-n}$ 的傅里叶变换收敛。能够收敛的 z 值范围称为收敛域 (ROC)，如果 ROC 包括单位圆，则 $x[n]$ 的傅里叶变换收敛。

同拉普拉斯变换一样，z 变换也有零点和极点。所谓极点，就是 $X(z) = \infty$ 的 z 点。

2 1　一个例子

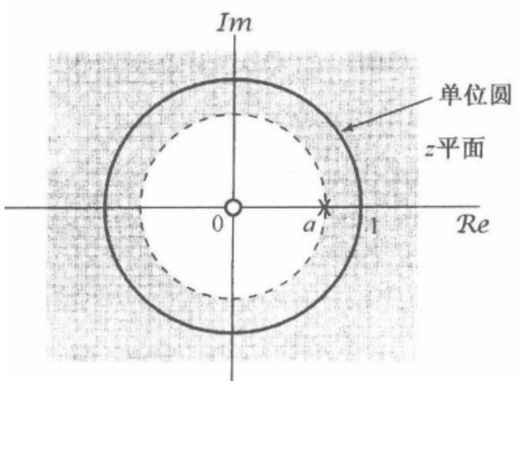
设信号 $x[n] = a^n u[n]$，则 z 变换为：

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (az^{-1})^n \end{aligned} \tag{二.4}$$

收敛，意味着求和的绝对值小于正无穷，也就是说 $|az^{-1}| < 1$，即 $|z| > |a|$：

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}} \qquad |z| > |a| \tag{二.5}$$

我们知道，当 $0 < a < 1$ 时，信号 $x[n]$ 的傅里叶变换是收敛的，因此：



2 2 收敛域

第一，收敛域是在 z 平面内以原点为中心的圆环（或者延伸到无穷处）。

第二，收敛域内不包含任何极点，这与拉氏变换同理。

第三，如果 $x[n]$ 是有限长的序列，那么收敛域就是整个 z 平面，但有可能会除去 $z=0$，也有可能会除去 $z=\infty$。

例如单位脉冲信号 $x[n]=\delta[n]$ 的 z 变换为：

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta[n]z^{-n}=1 \tag{二.6}$$

收敛域是整个 z 平面。

而对于延时单位脉冲信号 $x[n]=\delta[n-1]$，z 变换为：

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta[n-1]z^{-n}=z^{-1} \tag{二.7}$$

此时的 ROC 是除了 $z=0$ 的整个 z 平面。

对于超前单位脉冲信号 $x[n]=\delta[n+1]$，z 变换为：

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta[n+1]z^{-n}=z \tag{二.8}$$

此时的 ROC 是除了 $z=\infty$ 的整个 z 平面。

2 3 两个很重要的例子

下面两个例子会帮助读者更好地理解收敛域和零点、极点的关系。

对于一个序列 $x[n]$：

$$x[n]=\begin{cases}a^n, & 0\le n\le N-1, a>0\\ 0, & otherwise\end{cases} \tag{二.9}$$

由于是有限长的，所以收敛域包括了整个 z 平面。但是有可能会排除掉 $z=0$ 或者 $z=\infty$。我们实际计算一下：

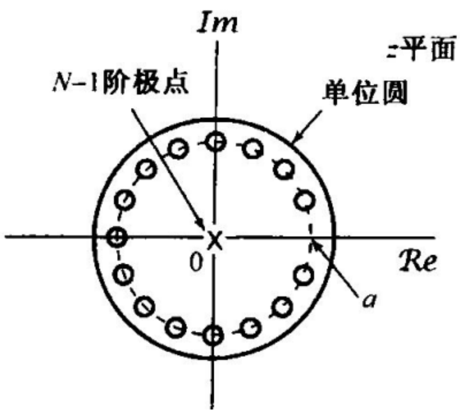
$$X(z)=\sum_{n=0}^{N-1}a^nz^{-n}=\frac{1}{z^{N-1}}\frac{z^N-a^N}{z-a} \tag{二.10}$$

乍看好像 $z=a$ 是一个极点，但是先不要下结论。分子多项式的零点为：

$$z_k=ae^{j(2\pi k/N)} \tag{二.11}$$

当 $k=0$ 时得到 $z_0=a$，这个零点正好与 $z=0$ 这个极点相互抵消。

画出当 $N=16$ 且 $0<a<1$（收敛域与 a 的值无关）时的 ROC 图：



第二个例子，设：

$$x[n] = b^{|n|} \quad b > 0 \tag{二.12}$$

我们可以想象，当 $b > 1$ 的时候，该信号趋向于正负无穷时，信号值都趋近于无穷，因此无论 z 怎么取值，z 变换都不可能收敛。

我们将该序列写为：

$$x[n] = b^n u[n] + b^{-n} u[-n-1] \tag{二.13}$$

$b^n u[n]$ 的 z 变换收敛域为 $|z| > b$；$|b^{-n} u[-n-1]|$ 的 z 变换收敛域为 $|z| < \frac{1}{b}$。所以，当 $b > 1$ 就相当于收敛域的交集为 $\{0\}$，也就无法收敛。

三　z 逆变换

3 1　z 逆变换公式

由于：

$$X(re^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[n]r^{-n}\} \tag{三.1}$$

所以可以做逆变换：

$$\begin{aligned}
x[n]r^{-n} &= \mathcal{F}^{-1}\{X(re^{j\omega})\} \\
x[n] &= r^n \mathcal{F}^{-1}\{X(re^{j\omega})\} \\
&= r^n \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(re^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(re^{j\omega}) (re^{j\omega})^n d\omega
\end{aligned} \tag{三.2}$$

既然 ω 是相位，这说明积分的路径对于 z 平面来说是一个圆圈。已知 $dz = jre^{j\omega} d\omega$，可以得到 $d\omega = (1/j) z^{-1} dz$。于是，积分式写为：

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{n-1} dz \tag{三.3}$$

积分路径为以 $|z| = r$ 单位圆环绕一周的积分，r 值可以取任意可以使 $X(z)$ 收敛的值。

3 2　例子一

同拉氏变换的逆变换一样，对于给定的 z 变换，其原始信号的形式与其收敛域有关。

考虑 [1] 中的例子：

$$X(z) = \frac{3 - \frac{5}{6} z^{-1}}{(1 - \frac{1}{4} z^{-1})(1 - \frac{1}{3} z^{-1})} \quad |z| > \frac{1}{3} \tag{三.4}$$

有两个极点，一个是 $z = \frac{1}{3}$，另一个是 $z = \frac{1}{4}$，所以说收敛域在 $z = \frac{1}{3}$ 外面。通过部分分式方法展开：

$$\begin{aligned}
X(z) &= \frac{1}{1 - \frac{1}{4} z^{-1}} + \frac{2}{1 - \frac{1}{3} z^{-1}} \\
x[n] &= x_1[n] + x_2[n]
\end{aligned} \tag{三.5}$$

对于 $x_1[n]$ 的 z 变换，收敛域为 $|z| > \frac{1}{4}$；对于 $x_2[n]$ 的 z 变换，收敛域为 $|z| > \frac{1}{3}$，因此得到：

$$x[n] = (\frac{1}{4})^n u[n] + 2(\frac{1}{3})^n u[n] \tag{三.6}$$

如果 $X(z)$ 的收敛域是 $\frac{1}{4} < |z| < \frac{1}{3}$，那么相当于对于 $x_2[n]$ 的 z 变换，收敛域为 $|z| < \frac{1}{3}$，于是：

$$x[n] = (\frac{1}{4})^n u[n] - 2(\frac{1}{3})^n u[-n-1] \tag{三.7}$$

3 3 例子二

例子二有助于更好地理解变换公式。考虑某个 z 变换为：

$$X(z) = 4z^2 + 2 + 3z^{-1}, \quad 0 < |z| < \infty \tag{三.8}$$

根据 z 变换公式：

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} \tag{三.9}$$

因此可以得到：

$$x[n] = \begin{cases} 4, & n = -2 \\ 2, & n = 0 \\ 3, & n = 1 \\ 0, & otherwise \end{cases} \tag{三.10}$$

$$\Longrightarrow x[n] = 4\delta[n+2] + 2\delta[n] + 3\delta[n-1] \tag{三.11}$$

参考文献

[1] Signals and Systems Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, with S. Hamid Nawab. Prentice Hall, 2013.