从 Haar 小波认识小波空间

Dezeming Family

2022 年 4 月 20 日

DezemingFamily 系列书和小册子因为是电子书，所以可以很方便地进行修改和重新发布。如果您获得了 DezemingFamily 的系列书，可以从我们的网站 [https://dezeming.top/] 找到最新版。对书的内容建议和出现的错误欢迎在网站留言。

目录

一 $\mathcal{V}$ 空间 **1**

1 1 $\mathcal{V}_0$ 空间 1

1 2 把函数投影到 $\mathcal{V}_0$ 空间 1

1 3 更准确的投影 2

二 Haar 小波空间 $\mathcal{W}_0$ **2**

2 1 投影 $\mathcal{V}_1$ 空间的函数到 $\mathcal{V}_0$ 2

2 2 残差函数 3

2 3 残差空间 3

2 4 正交性 4

三 空间分解 **4**

3 1 空间分解 4

3 2 信号分解与重建 5

3 3 总结 5

参考文献 **5**

引子

在我强行阅读完 [2] 等一些图书和学习完一些专业课程后，我一直觉得小波是一个难以快速掌握精髓的领域，直到我看到了 [1] 这本书。该书从 Haar 小波开始讲起，仅用了几章，就将小波分析讲得深入人心。该书也是我们本文主要参考的书籍，可以让读者更容易地感受到小波尺度函数与小波函数的作用。

我承认，如果小波变换中只认识 Haar 小波，看起来就像是一场数字游戏，意义貌似并不大。但 Haar 作为最简单的小波（而且还是正交小波），是学习更有效的小波的重要桥梁。

一 $\mathcal{V}$ 空间

1 1 $\mathcal{V}_0$ 空间

假设有一个函数：

$$\phi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1 \\ 0, & otherwise \end{cases} \tag{一.1}$$

这个函数倍乘左右平移整数格，就可以构成各种“阶梯函数”。我们把这些阶梯函数所在的空间称为 $\mathcal{V}_0$ 空间：

$$\mathcal{V}_0 = span\{\phi(t-k)\}_{k\in\mathbb{Z}} \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \tag{一.2}$$

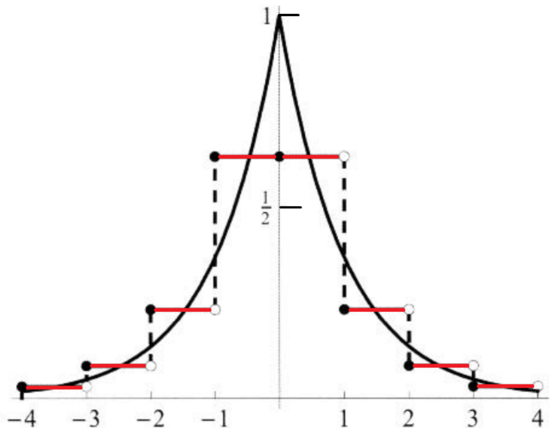
我们很容易证明 $span\{\phi(t-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 是 $\mathcal{V}_0$ 的单位正交基。注意上面的求交 $\cap$，这是因为 $span\{\phi(t-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 扩张成的空间完全可以是能量无限的函数空间，但我们仅仅需要关注里面能量有限的部分，因此与 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 进行求交得到 $\mathcal{V}_0$ 空间。

1 2 把函数投影到 $\mathcal{V}_0$ 空间

投影方法：

$$P(g(t)) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle g(t), \phi(t-k)\rangle \phi(t-k) \tag{一.3}$$

因此可以理解为投影后得到一个阶梯函数。注意这跟“函数分段离散化”很相似，函数分段后，段 $[t_0, t_1)$ 的值可以是函数在 t_0 的值，也可以是 t_1 的值；投影时，每段的值是 $\langle g(t), \phi(t-t_0)\rangle$。下图是 $f(t) = e^{-|t|}$（注意这是一个支撑为 $(-\infty, +\infty)$ 之间的能量有限函数）在 $\mathcal{V}_0$ 上的投影。



1 3 更准确的投影

我们可以认为 $P(g(t))$ 是对 $g(t)$ 的一个近似。但是这个近似貌似并没有那么准确，于是我们构建一个新的函数：

$$\phi(2t) = \begin{cases} 1, & 0 \le 2t < 1 \\ 0, & otherwise \end{cases} \tag{一.4}$$

以及它整数平移后的函数张成的空间：

$$\mathcal{V}_1 = span\{\phi(2t-k)\}_{k\in\mathbb{Z}} \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \tag{一.5}$$

现在，把 $g(t)$ 投影到 $\mathcal{V}_1$ 就能得到比刚才更精确的表示。

还能更精确么？当然。我们定义 $\mathcal{V}_j$ 空间：

$$\mathcal{V}_j = span\{\phi(2^j t-k)\}_{k\in\mathbb{Z}} \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \tag{一.6}$$

当 $j \to +\infty$ 时，$\mathcal{V}_j$ 就趋近于整个 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 空间。

我们还可以得到这个关系：

$$\mathcal{V}_j \subset \mathcal{V}_{j+1} \tag{一.7}$$

$$\mathcal{V}_{+\infty} \equiv \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \tag{一.8}$$

现在有一个问题，$\phi(2^j t-k)_{k\in\mathbb{Z}}$ 是不是单位基？并不是。我们希望通过 $\phi(t)$ 来定义 $\mathcal{V}_j$ 空间的单位正交基，其实也很简单：$2^{j/2}\phi(2^j t-k)_{k\in\mathbb{Z}}$ 是单位基。因此，定义 $\mathcal{V}_j$ 空间的单位正交基：

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\phi(2^j t-k) \quad k\in\mathbb{Z} \tag{一.9}$$

把 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 内的函数投影到 $\mathcal{V}_j$ 空间：

$$P_{g,j}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle \phi_{j,k}(t), g(t)\rangle \phi_{j,k}(t) \tag{一.10}$$

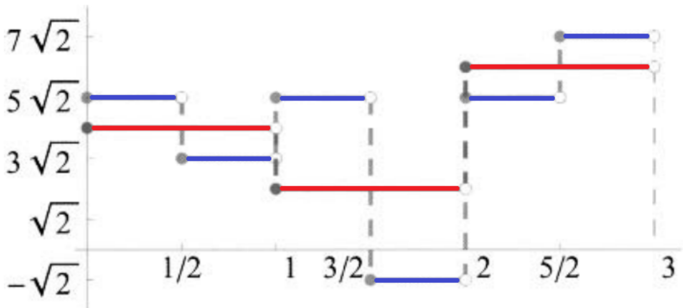
二 Haar 小波空间 $\mathcal{W}_0$

2 1 投影 $\mathcal{V}_1$ 空间的函数到 $\mathcal{V}_0$

假设某个函数 $f_1(t)$ 是属于 $\mathcal{V}_1$ 空间的，我们希望用 $\mathcal{V}_0$ 空间的函数 $f_0(t)$ 去近似它，因此可以做投影：

$$P(f_{1,0}(t)) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f_1(t), \phi(t-k)\rangle \phi(t-k) \tag{二.1}$$

其实这就相当于在 $f_1(t)$ 函数的 $[k,k+1)_{k\in\mathbb{Z}}$ 做平均，得到 $f_0(t-k)$（蓝色函数表示 $f_1(t)$，红色函数表示 $f_0(t)$）：



我们总结一下公式（注意 $\phi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\phi(2^j t-k)$）：

$$f_1(t) \in \mathcal{V}_1: \quad f_1(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k\phi_{1,k}(t)$$

$$f_0(t) \in \mathcal{V}_0: \quad f_0(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k\phi_{0,k}(t)$$

$$\Longrightarrow b_k = \frac{\sqrt{2}}{2}(a_{2k} + a_{2k+1}) \tag{二.2}$$

注意公式前面的 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，与单位标准基有关。

2 2　残差函数

我们知道，$f_0(t)$ 是 $f_1(t)$ 在 $\mathcal{V}_0$ 空间的近似。假设：

$$f_1(t) = f_0(t) + g_0(t) \Longrightarrow g_0(t) = f_1(t) - f_0(t) \tag{二.3}$$

称 $g_0(t)$ 为残差函数。

例如某个函数：

$$\begin{aligned} & f_1(t) = 2\phi_{1,0}(t) + 4\phi_{1,1}(t) + 5\phi_{1,2}(t) + 3\phi_{1,3}(t) \\ \Longrightarrow\ & f_0(t) = 3\sqrt{2}\phi_{0,0}(t) + 4\sqrt{2}\phi_{0,1}(t) \end{aligned} \tag{二.4}$$

由于：

$$\begin{aligned} \phi_{0,0}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_{1,0}(t) + \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_{1,1}(t) \\ \phi_{0,1}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_{1,2}(t) + \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_{1,3}(t) \end{aligned}$$

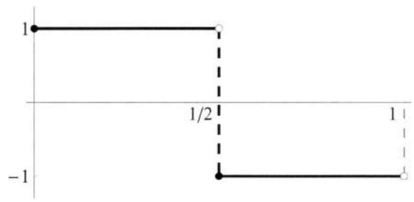
所以可以得到：

$$\begin{aligned} & f_0(t) = 3\phi_{1,0}(t) + 3\phi_{1,1}(t) + 4\phi_{1,2}(t) + 4\phi_{1,3}(t) \\ \Longrightarrow\ & g_0(t) = -\phi_{1,0}(t) + \phi_{1,1}(t) + \phi_{1,2}(t) - \phi_{1,3}(t) \\ & \qquad = -(\phi_{1,0}(t) - \phi_{1,1}(t)) + (\phi_{1,2}(t) - \phi_{1,3}(t)) \end{aligned} \tag{二.5}$$

为了简化上面的结果表示，我们定义一个小波函数：

$$\psi(t) = \phi(2t) - \phi(2t-1) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < \frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} \le t < 1 \\ 0, & otherwise \end{cases} \tag{二.6}$$

该函数的图示如下：



这样，我们就可以把 $g_0(t)$ 写为：

$$g_0(t) = -\sqrt{2}\psi(t) + \sqrt{2}\psi(t) \tag{二.7}$$

对于任意 $f_1(t) \in \mathcal{V}_1$，其在 $\mathcal{V}_0$ 上的投影为 $f_0(t)$，残差函数 $g_0(t)$ 都可以表示为：

$$\begin{aligned} g_0(t) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \psi(t-k) \\ c_k &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{2k} - a_{2k+1}) \end{aligned} \tag{二.8}$$

2 3　残差空间

根据小波函数 $\psi(t)$ 来定义残差空间：

$$\mathcal{W}_0 = span\{\psi(t-k)\}_{k\in\mathbb{Z}} \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \tag{二.9}$$

其中，$\{\psi(t-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 是 $\mathcal{W}_0$ 的一组标准正交基。

现在总结一下。$\mathcal{V}_0$ 空间的一组标准正交基是：$\{\phi(t-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$。$\mathcal{W}_0$ 空间的一组标准正交基是 $\psi(t-k)_{k\in\mathbb{Z}}$。

现在定义 $\mathcal{W}_j$ 空间：

$$\mathcal{W}_j = span\{\psi(2^j t-k)\}_{k\in\mathbb{Z}} \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \tag{二.10}$$

其单位正交基为 $\{2^{j/2}\psi(2^j t-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$，简写为 $\psi_{j,k}(t)$

2 4 正交性

设函数 $f(t)\in\mathcal{V}_0$，函数 $g(t)\in\mathcal{W}_0$，由此可得：

$$\left\langle f(t), g(t)\right\rangle \tag{二.11}$$

这很好证明，可以把 $f(t)$ 和 $g(t)$ 分别写为一系列 $\phi(t-k)_{k\in\mathbb{Z}}$ 和 $\psi(t-l)_{k\in\mathbb{Z}}$ 的和的形式，然后来证明内积为 0。

上式说明，$\mathcal{V}_0$ 和 $\mathcal{W}_0$ 相互正交。由因为 $f(t)+g(t)$ 可以构成全部 $\mathcal{V}_1$ 空间里的函数，所以：

$$\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_0 \oplus \mathcal{W}_0 \tag{二.12}$$

进一步扩展：

$$\left\langle \phi_{j,k}(t), \psi_{l,m}(t)\right\rangle = \begin{cases} 1, & if\ j=l\ and\ k=m \\ 0, & otherwise \end{cases} \tag{二.13}$$

我们给出扩张公式 (Dilation Equation)：

$$\phi_{j,k}(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\phi_{j+1,2k}(t) + \frac{\sqrt{2}}{2}\phi_{j+1,2k+1}(t) \tag{二.14}$$

$$\psi_{j,k}(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\phi_{j+1,2k}(t) - \frac{\sqrt{2}}{2}\phi_{j+1,2k+1}(t) \tag{二.15}$$

最后，我们可以给出：

$$\mathcal{V}_{j+1} = \mathcal{V}_j \oplus \mathcal{W}_j \tag{二.16}$$

三 空间分解

3 1 空间分解

我们知道：

$$\mathcal{V}_{j+1} = \mathcal{V}_j \oplus \mathcal{W}_j \tag{三.1}$$

所以：

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_5 &= \mathcal{V}_4 \oplus \mathcal{W}_4 \\ &= \mathcal{V}_3 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4 \\ &= \mathcal{V}_2 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4 \\ &= \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4 \\ &= \mathcal{V}_0 \oplus \mathcal{W}_0 \oplus \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4 \end{aligned} \tag{三.2}$$

其实，$\mathcal{V}_0$ 还可以分解为 $\mathcal{V}_{-1}\oplus\mathcal{W}_{-1}$，规则不变。

设 $f_j(t)\in\mathcal{V}_j$，$g_k(t)\in\mathcal{W}_k$，则对 $\mathcal{V}_{j+M}$ 空间的函数进行分解，可以得到：

$$f_{j+M}(t) = f_j(t) + g_j(t) + g_{j+1}(t) + \cdots + g_{j+M-1}(t) \tag{三.3}$$

3 2 信号分解与重建

有了前面的基础，我们写一下信号分解和重建的表示方法：

$$
\begin{aligned}
f_{j+1}(t) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \phi_{j+1,k}(t) \\
f_{j+1}(t) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k \phi_{j,k}(t) + \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \psi_{j,k}(t) \\
b_k &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{2k} + a_{2k+1}) \qquad c_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{2k} - a_{2k+1})
\end{aligned}
\tag{三.4}
$$

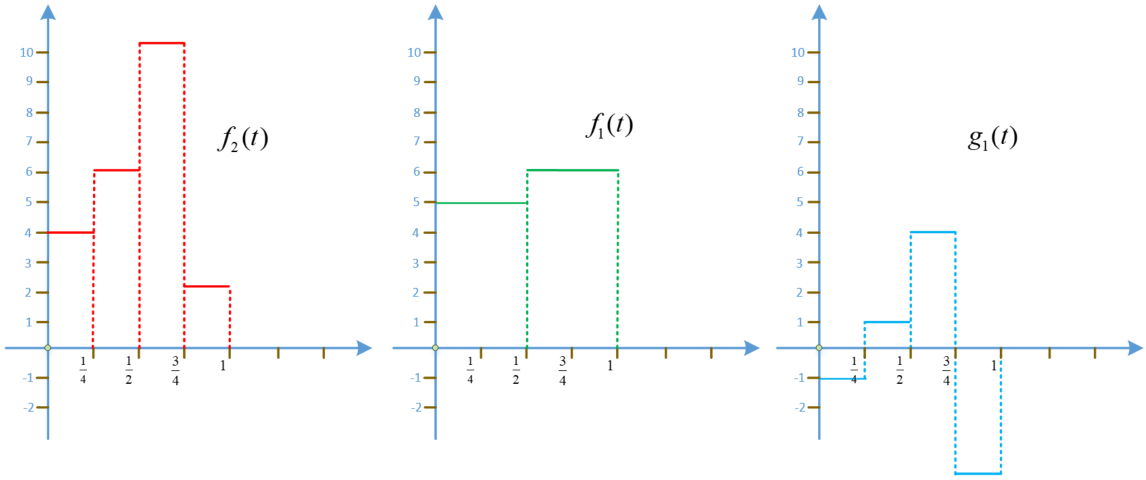
举个例子来更好地说明一下。设某个信号 $f_2(t)$：

$$f_2(t) = 2\phi_{2,0}(t) + 3\phi_{2,1}(t) + 5\phi_{2,2}(t) + \phi_{2,3}(t) \tag{三.5}$$

根据上式可以写为：

$$f_2(t) = \frac{5}{\sqrt{2}}\phi_{1,0}(t) + \frac{6}{\sqrt{2}}\phi_{1,1}(t) + \frac{-1}{\sqrt{2}}\psi_{1,0}(t) + \frac{4}{\sqrt{2}}\psi_{1,1}(t) \tag{三.6}$$

图示如下：



3 3 总结

小波分解其实就是把信号分解到各个子空间中，而这些子空间又是相互正交的，并且具有不同的特性。

通过 Haar 小波的空间分解，我们可以很好地掌握小波变换的实际意义——将信号分为近似的部分和细节的部分。Haar 小波很适合用来理解离散小波变换。不过，为了更深入理解小波变换，我认为在认识了小波空间以后，应该再去学习和理解连续小波变换的内容，而不是直接陷入到离散小波中——这会带来很多固有和片面的印象。

参考文献

[1] Ruch D K , Fleet P V . Wavelet Theory: An Elementary Approach with Application[M]. John Wiley & Sons, 2009.

[2] Ingrid Daubechies. 小波十讲 [M]. 国防工业出版社, 2004.