从傅里叶变换到离散时间傅里叶变换和离散傅里叶变换

Dezeming Family

2021 年 12 月 9 日

DezemingFamily 系列书和小册子因为是电子书，所以可以很方便地进行修改和重新发布。如果您获得了 DezemingFamily 的系列书，可以从我们的网站 [https://dezeming.top/] 找到最新版。对书的内容建议和出现的错误欢迎在网站留言。

目录

一　连续周期信号-傅里叶级数

关于傅里叶变换的产生我已经写过 [1]，所以这里并不再赘述，而是做一个简单的回顾。

对于连续周期信号，我们想把它表示为一系列复指数信号的和的形式：

$$f(x) = a_0 + a_1 e^{j\omega_0 x} + a_2 e^{2j\omega_0 x} + a_3 e^{3j\omega_0 x} + \cdots \tag{一.1}$$

ω_0 叫做基波频率。为什么要定义一个基波频率，这是因为这样就能说明这个函数 $f(x)$ 是一个周期函数。当 $a_1 \neq 0$ 时，最小的周期为 $\frac{2\pi}{\omega_0}$。

当然，如果一个函数写成复指数的形式是：

$$f(x) = a_0 + a_1 e^{j\omega_1 x} + a_2 e^{j\omega_2 x} + a_3 e^{j\omega_3 x} + \cdots \tag{一.2}$$

我们也一定能找到一个最小的 ω_0，使得 $\omega_1 = n_1\omega_0$，$\omega_2 = n_2\omega_0$，$\omega_3 = n_3\omega_0$... 其中，n_1, n_2, n_3 都是正整数。这样，就得到了基波频率 ω_0。

当然，我们也可以理解为 $f(x)$ 与不同角频率复指数信号的相似程度。如果 $a_1 > a_2$，说明函数 $f(x)$ 与 $e^{j\omega_0 x}$ 比 $f(x)$ 与 $e^{2j\omega_0 x}$ 更相近。

a_n 被称为傅里叶级数，它的求法也很简单：

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 x} \tag{一.3}$$

$$f(x)e^{-jn\omega_0 x} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 x} e^{-jn\omega_0 x} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{j(k-n)\omega_0 x} \tag{一.4}$$

$$\int_0^T f(x)e^{-jn\omega_0 x}dx = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \Big[\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 x}dx\Big] \tag{一.5}$$

$$\Big[\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 x}dx\Big] = \begin{cases} T, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases} \tag{一.6}$$

$$\Longrightarrow a_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-jn\omega_0 x}dx \tag{一.7}$$

可以看到，$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx$，即一个周期内的平均值。

二　离散周期信号-傅里叶级数

离散信号同理，设离散周期信号 $f[n]$ 的周期为 N：

$$f[n] = f[n+N] \tag{二.1}$$

与连续信号同理，定义周期复指数信号：

$$\phi_k[n] = e^{jk\omega_0 n} = e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \tag{二.2}$$

$$\phi_{k+N}[n] = e^{j(k+N)\frac{2\pi}{N}n} = e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \cdot e^{2j\pi n} = e^{jk\frac{2\pi}{N}n} = \phi_k[n] \tag{二.3}$$

表示为复指数信号的和的形式为：

$$f[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \tag{二.4}$$

这里的 n 可以是 [0,1,2,...,N-1]，也可以是 [2,3,4,...,N+1]。从上面可以看到，相比于连续信号，离散信号具有更好的性质：对于周期为 N 的信号，由于 $f[n]$ 和 $\phi_k[n]$ 是周期重复的，则表示成傅里叶级数以后级数值 a_k 也应当是周期重复的，周期为 N。

至于级数怎么求，其实也不难：

$$f[n]=\sum_{k=<N>}a_ke^{jk\frac{2\pi}{N}n} \tag{二.5}$$

$$\sum_{n=<N>}f[n]=\sum_{n=<N>}\left[\sum_{k=<N>}a_ke^{jk\frac{2\pi}{N}n}\right] \tag{二.6}$$

$$\sum_{n=<N>}\left[f[n]e^{-jr\frac{2\pi}{N}n}\right]=\sum_{n=<N>}\left[\sum_{k=<N>}a_ke^{jk\frac{2\pi}{N}n}e^{-jr\frac{2\pi}{N}n}\right]=\sum_{n=<N>}\left[\sum_{k=<N>}a_ke^{j(k-r)\frac{2\pi}{N}n}\right] \tag{二.7}$$

$$=\sum_{k=<N>}a_k\left[\sum_{n=<N>}e^{j(k-r)\frac{2\pi}{N}n}\right] \tag{二.8}$$

又因为（下面的内容其实展开成 sin 和 cos 的形式就能很简单得到）：

$$\left[\sum_{n=<N>}e^{j(k-r)\frac{2\pi}{N}n}\right]=\begin{cases}N, & k=0,\pm N,\pm 2N,\cdots\\ 0, & otherwise\end{cases} \tag{二.9}$$

所以可以得到：

$$a_r=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}f[n]e^{-jr\frac{2\pi}{N}n} \tag{二.10}$$

$$f[n]=a_0\phi_0[n]+a_1\phi_1[n]+a_2\phi_2[n]+\cdots+a_{N-1}\phi_{N-1}[n] \tag{二.11}$$

$$=a_1\phi_1[n]+a_2\phi_2[n]+a_3\phi_3[n]+\cdots+a_N\phi_N[n] \tag{二.12}$$

我们再次提一句，a_k 是周期重复的。

三　连续非周期信号-连续时间傅里叶变换 CTFT

我们重新看一下傅里叶级数。因为是在一个周期内，所以积分区间其实可以写为 $[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]$

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_ke^{jk\omega_0x} \tag{三.1}$$

$$a_k=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)e^{-jk\omega_0x}dx=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)e^{-jk\frac{2\pi}{T}x}dx \tag{三.2}$$

当周期 T 逐渐变大的时候，如果我们用一个笛卡尔坐标系的横坐标表示 ω，纵坐标表示 a_k，我们会发现 a_k 和 a_{k+1} 之间的距离会越来越接近。当 T 为无穷大时，这是周期信号就变为了非周期信号（或者说，是周期无穷大的周期信号），此时，各个傅里叶级数 a_k 连成了一个连续函数。

我们用 ω 来表示 $k\omega_0$，经过一系列的推导，可以得到：

$$\begin{cases} f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(j\omega)e^{j\omega x}d\omega\\ F(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-j\omega x}dx\end{cases} \tag{三.3}$$

对于连续的周期信号，傅里叶变换可以表示为：

$$F(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}2\pi a_k\delta(\omega-k\omega_0) \tag{三.4}$$

四　离散非周期信号-离散时间傅里叶变换 DTFT

首先我们有一个信号 $f[n]$，我们将它有不为 0 的区间 $[-N_1,N_2]$ 定义为有值空间，设一个大于区间宽度的周期，扩展为离散周期信号 $\tilde{f}[n]$，周期为 N，其中 $N>N_2+N_1$。离散时间傅里叶变换表示如下：

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} \tilde{f}[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \tag{四.1}$$

$$\tilde{f}[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \tag{四.2}$$

我们也可以表示为：

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \tag{四.3}$$

我们设 $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$，然后得到：

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f[n] e^{-jk\omega_0 n} \tag{四.4}$$

我们再令：

$$F(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f[n] e^{-j\omega n} \tag{四.5}$$

$$a_k = \frac{1}{N} F(e^{jk\omega_0}) \tag{四.6}$$

我们可以看出，$F(e^{j\omega})$ 是一个周期为 2π 的周期函数。我们再重新表示一下 $\tilde{f}[n]$：

$$\tilde{f}[n] = \sum_{k=<N>} \frac{1}{N} F(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n} \tag{四.7}$$

$$\frac{1}{N} = \frac{\omega_0}{2\pi} \Longrightarrow \tilde{f}[n] = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=<N>} F(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n} \omega_0 \tag{四.8}$$

随着 $N \to \infty$，得到：

$$f[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} F(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \tag{四.9}$$

上面的积分区间是 2π 是因为积分区域一共是 N 个数，其中每个树的间隔是 ω_0，又因为 $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$，所以总积分区间的宽度是 2π。这样，我们得到的离散时间傅里叶变换对：

$$\begin{cases} f[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} F(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \\ F(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f[n] e^{-j\omega n} \end{cases} \tag{四.10}$$

对于离散周期信号的傅里叶变换，就是（我们会在《周期信号的傅里叶变换：连续时间与离散时间》里进行讲解）：

$$F(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta\big(\omega - \frac{2\pi k}{N}\big) \tag{四.11}$$

有人说，DTFT 就是计算机所计算的离散信号的傅里叶变换表示，这是不对的，因为计算出来的 $F(e^{j\omega})$ 是连续信号，计算机没有办法表示连续信号。所以，DTFT 其实也只是存在于理论中的变换方法。对于有限长的信号，还是得借助转变为周期信号。

五 总结

最后，做一点简单的解释。为什么连续时间傅里叶变换用 $F(j\omega)$ 来表示，而离散时间傅里叶变换用 $F(e^{j\omega})$ 来表示，其实这是与系统的频率响应有关的。对于离散时间傅里叶变换，用 $F(e^{j\omega})$，其实就说明了这是一个周期函数，因为 $e^{j\omega} = e^{j(\omega+2\pi)}$，所以我么可以看出离散时间傅里叶变换是以 2π 为周期的函数。

参考文献

[1] https://feimo.blog.csdn.net/article/details/104909749