周期信号的傅里叶变换：连续时间与离散时间

Dezeming Family

2022 年 4 月 14 日

DezemingFamily 系列书和小册子因为是电子书，所以可以很方便地进行修改和重新发布。如果您获得了 DezemingFamily 的系列书，可以从我们的网站 [https://dezeming.top/] 找到最新版。对书的内容建议和出现的错误欢迎在网站留言。

目录

一　连续时间周期信号的傅里叶变换

1 1　基本原理与推导

首先给出连续时间周期信号的傅里叶级数和逆变换公式：

$$a_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-jk\omega_0 x}dx \tag{一.1}$$

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t} \tag{一.2}$$

现在考虑一个信号 $x(t)$，假设这个信号的傅里叶变换是一个面积为 2π，出现在 $\omega = \omega_0$ 处的单独的一个冲激：

$$X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \tag{一.3}$$

进行逆变换：

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \tag{一.4}$$

$$\Longrightarrow x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega-\omega_0)e^{j\omega t}d\omega = e^{j\omega_0 t} \tag{一.5}$$

推广一下，如果 $X(j\omega)$ 是等间隔的一组冲激函数的线性组合：

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k\delta(\omega - k\omega_0) \tag{一.6}$$

则根据逆变换公式，就可以得到（这是一个周期信号）：

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \tag{一.7}$$

这个式子与 Equ.(一.2) 完全一样。因此一个周期信号的傅里叶变换，可以看做是频率域上的一串冲激函数。

1 2　一个例子

假设有一个周期为 T 的周期冲激串：

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty}\delta(t - kT) \tag{一.8}$$

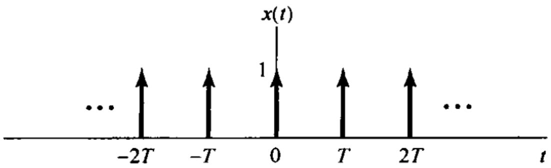
求出傅里叶级数为：

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}}\delta(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T} \tag{一.9}$$

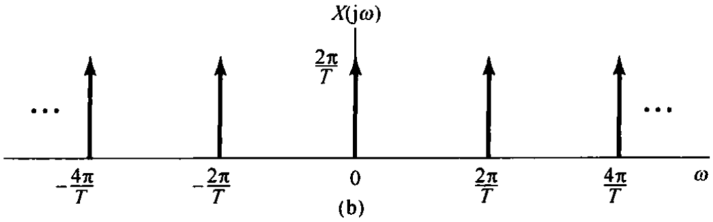
于是傅里叶变换就是：

$$X(j\omega) = \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega - \frac{2\pi k}{T}) \tag{一.10}$$

可以看到，周期为 T 的冲激串傅里叶变换后的周期是 $\frac{2\pi}{T}$，这也符合直觉，即周期变大时，频域间隔就会变小。



(a)



二 离散时间周期信号的傅里叶变换

2 1 基本原理与推导

对于离散周期信号 $x[n]$，其傅里叶级数为：

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \tag{二.1}$$

考虑一个信号：

$$x[n] = e^{j\omega_0 n} \tag{二.2}$$

类似于连续周期信号，其傅里叶变换也应该是周期的。但是需要注意的是，离散时间傅里叶变换的结果对于 ω 来说一定是一个周期为 2π 的函数，所以 $x[n]$ 的傅里叶变换应该是在 ω_0，$\omega_0 \pm 2\pi$，$\omega_0 \pm 4\pi$，... 等处的冲激串：

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) \tag{二.3}$$

验证该式：

$$\frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) e^{j\omega n} d\omega \tag{二.4}$$

注意在一个 2π 长度的区间内只包含一个冲激，比如包含 $\omega = \omega_0 + 2\pi r$ 处的冲激，那么：

$$\frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = e^{j(\omega_0 + 2\pi r)n} = e^{j\omega_0 n} \tag{二.5}$$

对于一个周期序列 $x[n]$，傅里叶级数和傅里叶变换就是：

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \tag{二.6}$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - \frac{2\pi k}{N}) \tag{二.7}$$

关于傅里叶变换怎么来的，我再多写一两步：

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0 - 2\pi l) \quad \left(k\omega_0 = \frac{2\pi k}{N}\right) \\ &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - \frac{2\pi k}{N} - 2\pi l) \end{aligned} \tag{二.8}$$

这里的 l 并没有太多实际作用，而且毕竟 $X(e^{j\omega})$ 是周期为 2π 的函数，所以可以去掉（令 $l = 0$）。因此，得到上述傅里叶变换结果 Equ.(二.7)。

2 2 一个例子

假设一个信号 $x[n]$：

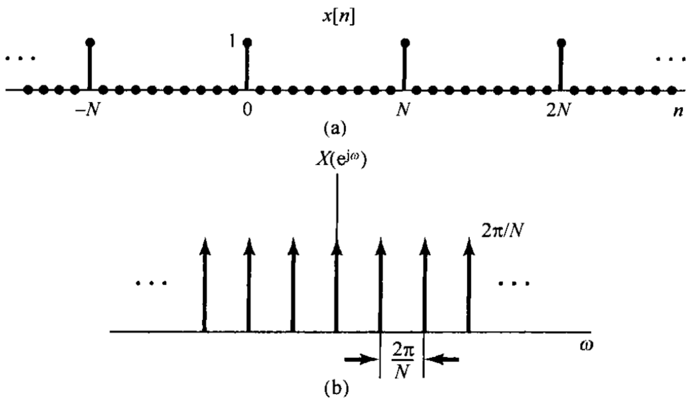
$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - kN] \tag{二.9}$$

傅里叶级数的系数为：

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N} \tag{二.10}$$

所以傅里叶变换就是：

$$X(e^{j\omega}) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi k}{N}) \tag{二.11}$$



参考文献

[1] Signals and Systems Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, with S. Hamid Nawab. Prentice Hall, 2013.