多分辨分析与 Haar 小波

Dezeming Family

2022 年 4 月 28 日

DezemingFamily 系列书和小册子因为是电子书，所以可以很方便地进行修改和重新发布。如果您获得了 DezemingFamily 的系列书，可以从我们的网站 [https://dezeming.top/] 找到最新版。对书的内容建议和出现的错误欢迎在网站留言。

目录

一　从 Haar 小波理解尺度滤波器和小波滤波器

本文的内容量较少，也较为简单，仅仅作为一些内容补充。

1 1　Haar 尺度滤波器

尺度滤波器写作：

$$\mathbf{h} = \Big[h_0, h_1\Big]^T = \Big[\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\Big]^T \tag{一.1}$$

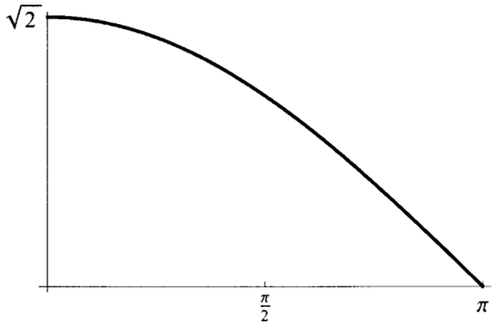
频域表示为：

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k\in 0,1} h_k e^{-ik\omega} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\omega} \\ &= \sqrt{2} e^{\frac{i\omega}{2}} \cos(\frac{\omega}{2}) \end{aligned}$$

所以，模为：

$$|H(\omega)| = \sqrt{2}\big|\cos(\frac{\omega}{2})\big| \tag{一.2}$$

图示为（这是一个周期为 2π 的函数，我们只考虑其中一个周期）：



该滤波器的作用是保留低频部分，衰减高频部分，因此称为低通滤波器。$\{h_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{Z})$ 是低通滤波器 $H(\omega)$ 的脉冲响应。

1 2　Haar 小波滤波器

小波滤波器写作：

$$\mathbf{g} = \Big[g_0, g_1\Big]^T = \Big[\tfrac{\sqrt{2}}{2}, -\tfrac{\sqrt{2}}{2}\Big]^T \tag{一.3}$$

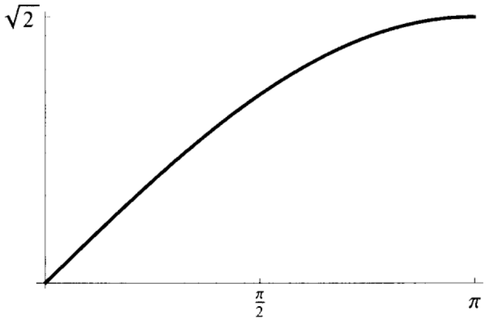
频域表示为：

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k\in 0,1} h_k e^{-ik\omega} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\omega} \\ &= -\sqrt{2} i e^{\frac{i\omega}{2}} \sin(\frac{\omega}{2}) \end{aligned}$$

所以，模为：

$$|G(\omega)| = \sqrt{2}\big|\sin(\frac{\omega}{2})\big| \tag{一.4}$$

图示为（这也是一个周期为 2π 的函数，我们只考虑其中一个周期）：



该滤波器的作用是保留高频部分，衰减低频部分，因此称为高通滤波器。$\{g_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{Z})$ 是高通滤波器 $G(\omega)$ 的脉冲响应。

在计算小波滤波器系数时，一般都是通过尺度滤波器系数来计算比较简单：

$$g_k = (-1)^k h_{1-k} \tag{一.5}$$

二　函数表示和滤波器性质

2 1　函数频域表示

为了更清楚地了解频域特性和滤波器特性，我们从函数的角度来进行分析。

设 $f_1(t) \in \mathcal{V}_1$，所以存在 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{Z})$，使得：

$$f_1(t) = \sum_n f_n \phi_{1,n}(t) \tag{二.1}$$

频域表示为：

$$\begin{aligned}\widehat{f}_1(\omega) &= (\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n e^{-i\frac{\omega}{2}n})\widehat{\phi}(\frac{\omega}{2}) \\ &= F(\frac{\omega}{2})\widehat{\phi}(\frac{\omega}{2})\end{aligned} \tag{二.2}$$

其中：

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n e^{-i\omega n} \tag{二.3}$$

2 2　滤波器性质

由于：

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |h_k|^2 = 1 \tag{二.4}$$

所以：

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |g_k|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |(-1)^k h_{1-k}|^2 = 1 \tag{二.5}$$

同时，我们前面得到过：

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k \overline{g}_k = 0 \tag{二.6}$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k h_{k-2l} = 0 \tag{二.7}$$

也可以推出：

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} g_k g_{k-2l} = 0 \tag{二.8}$$

因此，设 $\mathcal{L}^2(\mathbb{Z})$ 上的序列 $\{h_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$、$\{g_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$、$\{h_{k-2l}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 和 $\{g_{k-2l}\}_{k\in\mathbb{Z}}$，它们之间的正交性为：

$$\{h_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \perp \{g_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \tag{二.9}$$

$$\{h_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \perp \{h_{k-2l}\}_{k\in\mathbb{Z},l\in\mathbb{Z},l\neq 0} \tag{二.10}$$

$$\{g_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \perp \{g_{k-2l}\}_{k\in\mathbb{Z},l\in\mathbb{Z},l\neq 0} \tag{二.11}$$

而且 $\{h_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$、$\{g_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 都是 $\mathcal{L}^2(\mathbb{Z})$ 上的单位向量，

也就是说，当：

$$\{\phi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \perp \{\psi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \tag{二.12}$$

$$\tag{二.13}$$

可以写为：

$$\Big\{\{h_{k-2l}\}_{k\in\mathbb{Z},l\in\mathbb{Z}}, \{g_{k-2l}\}_{k\in\mathbb{Z},l\in\mathbb{Z}}\Big\} \tag{二.14}$$

构成 $\mathcal{L}^2(\mathbb{Z})$ 的一组标准正交基。

参考文献

[1] Ruch D K , Fleet P V . Wavelet Theory: An Elementary Approach with Application[M]. John Wiley & Sons, 2009.

[2] 冉启文. 小波变换与分数傅里叶变换理论及应用 [M]. 哈尔滨工业大学出版社, 2001.

[3] Ingrid Daubechies. 小波十讲 [M]. 国防工业出版社, 2004.