# 多分辨分析的频域分析

Dezeming Family

2022 年 4 月 27 日

DezemingFamily 系列书和小册子因为是电子书，所以可以很方便地进行修改和重新发布。如果您获得了 DezemingFamily 的系列书，可以从我们的网站 [https://dezeming.top/] 找到最新版。对书的内容建议和出现的错误欢迎在网站留言。

## 目录

# 一　$\phi(t)$ 的变换域

频域表示对推导一些重要性质和理解小波都非常有帮助，因此本文同样非常重要。

## 1 1　$H(\omega)$ 与 $H(z)$

再来看一下扩张方程：

$$\phi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k 2^{\frac{1}{2}} \phi(2t-k) \tag{一.1}$$

$$h_k = \langle \phi(t), \phi_{(1,k)}(t) \rangle \tag{一.2}$$

设 $f(t) = \phi(2t-k)$，根据傅里叶变换的性质：

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{2} e^{-\frac{ik\omega}{2}} \widehat{\phi}(\frac{\omega}{2}) \tag{一.3}$$

所以：

$$\widehat{\phi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-\frac{ik\omega}{2}} \widehat{\phi}(\frac{\omega}{2}) \tag{一.4}$$

令：

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik\omega} \tag{一.5}$$

所以：

$$\widehat{\phi}(\omega) = H(\frac{\omega}{2}) \widehat{\phi}(\frac{\omega}{2}) \tag{一.6}$$

由于：

$$\widehat{\phi}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \phi(t) e^{-i\omega \cdot 0} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tag{一.7}$$

所以：

$$\begin{aligned} \widehat{\phi}(0) &= H(\frac{0}{2}) \widehat{\phi}(\frac{0}{2}) \\ &\Longrightarrow H(0) = 1 \end{aligned} \tag{一.8}$$

为了表示方便，我们用 z 变换的形式来表示，即令 $z = e^{-i\omega}$：

$$H(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k z^k \tag{一.9}$$

## 1 2　紧支撑与系数的关系

假如 $H(z)$ 可以写为：

$$H(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{N} h_k z^k, \quad N \geq 1 \tag{一.10}$$

即尺度滤波器 $h_k$ 仅有有限个不为 0 的值，则 $\phi(t)$ 的紧支撑为 $[0, N]$，$\phi(t)$ 仅在有限区间内不为 0。这个推论的证明较为复杂，所以不再给出。

例如对于 Haar 小波：

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{e^{-i\omega}}{\sqrt{2}}) \tag{一.11}$$

$$H(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{z}{\sqrt{2}}) \tag{一.12}$$

仅在 $h_0, h_1$ 上值不为 0，所以 Haar 小波的支撑为 $[0, 1]$。

## 1 3 标准正交系与稳定性函数

先给出傅里叶变换的帕斯瓦尔恒等式 (Parseval's Identity)：设 $f(t), g(t) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$，则：

$$\begin{aligned} &\langle f(t), g(t) \rangle = \langle \widehat{f}(\omega), \widehat{g}(\omega) \rangle \\ &that\ is\ : \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{g(t)}dt = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega)\overline{\widehat{g}(\omega)}d\omega \end{aligned} \tag{一.13}$$

定义稳定性函数:

$$\mathcal{A}(\omega) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{\phi}(\omega + 2\pi l)\right|^2 \tag{一.14}$$

注意该稳定性函数来自于稳定性条件：

$$0 < A \le \mathcal{A}(\omega) \le B < \infty \tag{一.15}$$

我们现在来证明这个稳定性函数是一个常量函数，即：

$$\mathcal{A}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \qquad for\ \omega \in \mathbb{R} \tag{一.16}$$

该性质非常重要，在下一小结的证明中也会用到。

证明过程： 假设 $\{\phi(t-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 是一组标准正交基，则：

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(t)\overline{\phi(t-k)}dt = \delta(0-k) \tag{一.17}$$

做傅里叶变换：

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \phi(t)\overline{\phi(t-k)}dt &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{\phi}(\omega)\overline{\widehat{\phi}(\omega)e^{-i\omega k}}d\omega \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left|\widehat{\phi}(\omega)\right|^2 e^{i\omega k}d\omega \end{aligned} \tag{一.18}$$

把 $\mathbb{R}$ 空间分解成：

$$\mathbb{R} = \cdots \cup [-4\pi, -2\pi] \cup [-2\pi, 0] \cup [0, 2\pi] \cup [2\pi, 4\pi] \cup \cdots \tag{一.19}$$

因此可以写为：

$$\int_{\mathbb{R}} \left|\widehat{\phi}(\omega)\right|^2 e^{i\omega k}d\omega = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \int_{2\pi l}^{2\pi(l+1)} \left|\widehat{\phi}(\omega)\right|^2 e^{i\omega k}d\omega$$

进行替换，令 $u = w - 2\pi l$，得到：

$$\begin{aligned} \int_{2\pi l}^{2\pi(l+1)} \left|\widehat{\phi}(\omega)\right|^2 e^{i\omega k}d\omega &= \int_0^{2\pi} \left|\widehat{\phi}(u+2\pi l)\right|^2 e^{i(u+2\pi l)k}du \\ &= \int_0^{2\pi} \left|\widehat{\phi}(u+2\pi l)\right|^2 e^{iuk}e^{i2\pi lk}du \\ &= \int_0^{2\pi} \left|\widehat{\phi}(u+2\pi l)\right|^2 e^{iuk}du \end{aligned}$$

所以：

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \left|\widehat{\phi}(\omega)\right|^2 e^{i\omega k}d\omega &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \left|\widehat{\phi}(u+2\pi l)\right|^2 e^{iuk}du \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left|\widehat{\phi}(u+2\pi l)\right|^2\right] e^{iuk}du \\ &= \int_0^{2\pi} \mathcal{A}(u)e^{iuk}du = \delta(0-k) \end{aligned}$$

可以看出，$\mathcal{A}(u)$ 与除了 $k=0$ 的全部 $e^{iuk}$ 在 $[0,2\pi]$ 内相互正交。而且：

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(u+2\pi m) &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left|\widehat{\phi}(u+2\pi(m+l))\right|^2 \\ &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left|\widehat{\phi}(u+2\pi(l))\right|^2 = \mathcal{A}(u)\end{aligned} \tag{一.20}$$

所以说 $\mathcal{A}(u)$ 是一个周期为 $2\pi$ 的函数。因此，我们可以断定这是一个常函数。

令 $k=0$，得到：

$$\int_0^{2\pi}\left[\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\left|\widehat{\phi}(u+2\pi l)\right|^2\right]du = 1$$

又因为它是常函数，所以：

$$\mathcal{A}(u) = \frac{1}{2\pi} \tag{一.21}$$

## 1 4 正交符号条件

所谓正交符号条件 (Orthogonal Symbol Condition)，就是：

$$|H(\omega)|^2 + |H(\omega+\pi)|^2 = 1 \quad for\ all\ \omega \in \mathbb{R} \tag{一.22}$$

我们现在来证明该式。

证明过程：首先我们给出：

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\omega) &= \sum_{l\in\mathbb{Z}}\left|\widehat{\phi}(\omega+2\pi l)\right|^2 \\ \widehat{\phi}(\omega) &= H(\frac{\omega}{2})\widehat{\phi}(\frac{\omega}{2})\end{aligned} \tag{一.23}$$

替代得到：

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}}\left|H(\frac{\omega}{2}+\pi l)\right|^2\left|\widehat{\phi}(\frac{\omega}{2}+\pi l)\right|^2 = \frac{1}{2\pi} \tag{一.24}$$

把 $l\in\mathbb{Z}$ 写为奇数项的和以及偶数项的和的形式：

$$\begin{aligned}&\sum_{m\in\mathbb{Z}}\left|H(\frac{\omega}{2}+2\pi m)\right|^2\left|\widehat{\phi}(\frac{\omega}{2}+2\pi m)\right|^2 + \\ &\quad\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|H(\frac{\omega}{2}+(2n+1)\pi)\right|^2\left|\widehat{\phi}(\frac{\omega}{2}+(2n+1)\pi)\right|^2 = \frac{1}{2\pi}\end{aligned} \tag{一.25}$$

又因为 $H(\omega)$ 是周期为 $2\pi$ 的函数，所以上式可以写为：

$$\begin{aligned}&\left|H(\frac{\omega}{2})\right|^2\sum_{m\in\mathbb{Z}}\left|\widehat{\phi}(\frac{\omega}{2}+2\pi m)\right|^2 + \\ &\quad\left|H(\frac{\omega}{2}+\pi)\right|^2\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\widehat{\phi}(\frac{\omega}{2}+(2n+1)\pi)\right|^2 = \frac{1}{2\pi}\end{aligned} \tag{一.26}$$

由于：

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}}\left|\widehat{\phi}(\omega+2\pi l)\right|^2 = \frac{1}{2\pi} \tag{一.27}$$

我们可以得到：

$$\left|H(\frac{\omega}{2})\right|^2\cdot\frac{1}{2\pi} + \left|H(\frac{\omega}{2}+\pi)\right|^2\cdot\frac{1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \tag{一.28}$$

使用 $\omega$ 来替换掉 $\frac{\omega}{2}$，就可以证明结论。

# 二　$\psi(t)$ 的变换域

小波函数的相关频域分析证明和尺度函数基本一致，所以不再给出详细证明过程，但是为了详细起见，将主要内容都会给出。

## 2 1　$G(\omega)$ 与 $G(z)$

再来看一下扩张方程：

$$\psi(t)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}g_k2^{\frac{1}{2}}\phi(2t-k) \tag{二.1}$$

$$g_k=\left\langle\psi(t),\phi_{(1,k)}(t)\right\rangle \tag{二.2}$$

设 $f(t)=\phi(2t-k)$，根据傅里叶变换的性质：

$$\widehat{f}(\omega)=\frac{1}{2}e^{-\frac{ik\omega}{2}}\widehat{\phi}(\frac{\omega}{2}) \tag{二.3}$$

所以：

$$\widehat{\psi}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}g_ke^{-\frac{ik\omega}{2}}\widehat{\phi}(\frac{\omega}{2}) \tag{二.4}$$

令（注意这里默认 $h_k$ 是实数）：

$$G(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}g_ke^{-ik\omega}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^kh_{1-k}e^{-ik\omega} \tag{二.5}$$

所以：

$$\widehat{\psi}(\omega)=G(\frac{\omega}{2})\widehat{\phi}(\frac{\omega}{2}) \tag{二.6}$$

为了表示方便，用 z 变换的形式来表示，即令 $z=e^{-i\omega}$：

$$G(z)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}g_kz^k \tag{二.7}$$

## 2 2　$G(\omega)$ 的一些性质

我们先给出：

$$\begin{aligned}
H(\omega)&=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}h_ke^{-ik\omega}\\
H(\omega+\pi)&=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}h_ke^{-ik(\omega+\pi)}\\
&=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}h_ke^{-ik\omega}e^{-ik\pi}\\
&=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^kh_ke^{-ik\omega}\\
\overline{H(\omega+\pi)}&=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^kh_ke^{ik\omega}
\end{aligned}$$

令 $l=1-k$，得到：

$$\begin{aligned}
\overline{H(\omega+\pi)}&=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{(1-l)\in\mathbb{Z}}(-1)^{1-l}h_{1-l}e^{i(1-l)\omega}\\
&=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{(1-l)\in\mathbb{Z}}(-1)e^{i\omega}\cdot(-1)^{-l}h_{1-l}e^{-il\omega}\\
&=-e^{i\omega}\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{(1-l)\in\mathbb{Z}}(-1)^{-l}h_{1-l}e^{-il\omega}
\end{aligned} \tag{二.8}$$

其中，$(1-l)\in\mathbb{Z}$ 其实就是 $l\in\mathbb{Z}$，所以得到：

$$\overline{H(\omega+\pi)}=-e^{i\omega}\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{l\in\mathbb{Z}}(-1)^{-l}h_{1-l}e^{-il\omega}=-e^{i\omega}G(\omega) \tag{二.9}$$

这样就能证明出：

$$G(\omega)=-e^{-i\omega}\overline{H(\omega+\pi)} \tag{二.10}$$

根据上面这个性质，很容易就可以证明：

$$|G(\omega)|^2+|G(\omega+\pi)|^2=1 \quad for\ all\ \omega\in\mathbb{R} \tag{二.11}$$

以及 $H(\omega)$ 和 $G(\omega)$ 之间的关系：

$$H(\omega)\overline{G(\omega)}+H(\omega+\pi)\overline{G(\omega+\pi)}=0 \quad for\ all\ \omega\in\mathbb{R} \tag{二.12}$$

前面 Equ.一.8 证明过 $H(0)=1$，所以：

$$|H(0)|^2+|H(0+\pi)|^2=1\Longrightarrow H(\pi)=0 \tag{二.13}$$

所以 $G(0)=\overline{H(\pi)}=0$，因此：

$$\begin{aligned}G(\omega)&=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}g_ke^{-ik\omega}\\ G(0)&=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}g_k=0\\ &\Longrightarrow\sum_{k\in\mathbb{Z}}g_k=0\end{aligned} \tag{二.14}$$

另外在《初识多分辨分析》中，我们还给出了：

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}h_k=\sqrt{2} \tag{二.15}$$

利用该式和 $h_k$ 与 $g_k$ 之间的关系，可以导出 [1]：

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}h_{2k}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}h_{2k+1}=\frac{\sqrt{2}}{2} \tag{二.16}$$

**注意事项**

注意在《初识多分辨分析》一文里，我们介绍过 $h_k$ 和 $g_k$ 之间的关系。当 $h_k$ 为复数时，$g_k=(-1)^{1-k}\overline{h}_{1-k}$，可以得到：

$$G(\omega)=e^{-i\omega}\overline{H(\omega+\pi)} \tag{二.17}$$

其他的定理的证明都不影响。

# 三　总结

我们引入一个符号：

$$\mathbb{M}(\omega)=\begin{bmatrix}H(\omega) & H(\omega+\pi)\\ G(\omega) & G(\omega+\pi)\end{bmatrix} \tag{三.1}$$

根据：

$$H(\omega)\overline{G(\omega)}+H(\omega+\pi)\overline{G(\omega+\pi)}=0 \quad for\ all\ \omega\in\mathbb{R} \tag{三.2}$$

相当于：

$$\mathbb{M}(\omega)\mathbb{M}^*(\omega) = \mathbb{I} \tag{三.3}$$

也就是说，$\mathbb{M}(\omega)$ 是一个酉矩阵。

我们给出一个很重要的结论，但是并不附带证明过程（其实证明也并不难，但是重在理解）：若 $\mathbb{M}(\omega)$ 是一个酉矩阵，则根据扩张方程得到的 $\psi(t) \in \mathcal{W}_0$ 就是一个正交小波。换句话说，“$\mathbb{M}(\omega)$ 是酉矩阵”是构造正交小波的充分必要条件。

## 参考文献


[1] Ruch D K , Fleet P V . Wavelet Theory: An Elementary Approach with Application[M]. John Wiley & Sons, 2009.

[2] 冉启文. 小波变换与分数傅里叶变换理论及应用 [M]. 哈尔滨工业大学出版社, 2001.

[3] Ingrid Daubechies. 小波十讲 [M]. 国防工业出版社, 2004.