小波的引入与信号空间

Dezeming Family

2022 年 4 月 18 日

DezemingFamily 系列书和小册子因为是电子书，所以可以很方便地进行修改和重新发布。如果您获得了 DezemingFamily 的系列书，可以从我们的网站 [https://dezeming.top/] 找到最新版。对书的内容建议和出现的错误欢迎在网站留言。

目录

一　小波的引入

我一直在思考，如果哪天让我去介绍小波，我应该从什么方向去介绍。

大部分人会倾向于去从短时傅里叶变换开始介绍 [1]，这也符合我们的直观感受，可以让大家很快地掌握小波变换的原理——你不需要知道什么是多分辨分析与重构，也不需要知道各种能量守恒定义，也不需要知道各种完备性的推导，小波变换的应用似乎很简单。

但是，我还是想去从更深层次、更有启发性的层次去介绍小波，因此，一些原理和分析方法都是必不可少的。我的目标是尽量由浅入深，从整体的角度来介绍小波的方方面面，包括一些加速算法。这同时也是自己的一次知识梳理和加深印象的过程。

我先给出一个值得思考的例子。

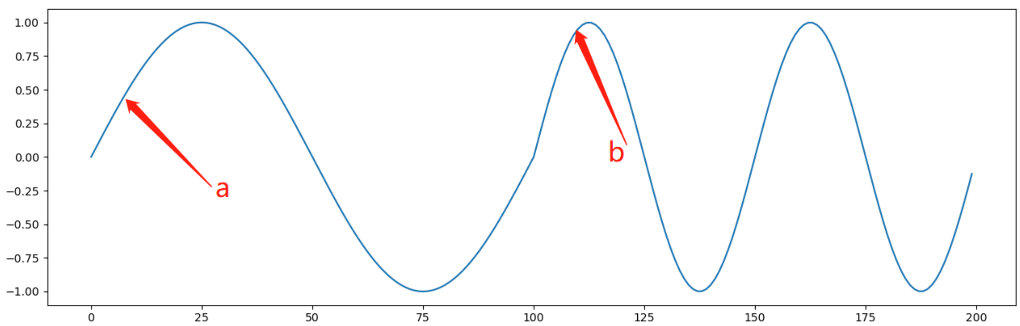
1 1　测不准原理与瞬时频率

怎么衡量一个信号（或函数）的变化速率？

学过微积分的人都知道求导，导数可以精准地描述一个点处函数的变化速率。

还有没有别的衡量函数变化速率的方法？

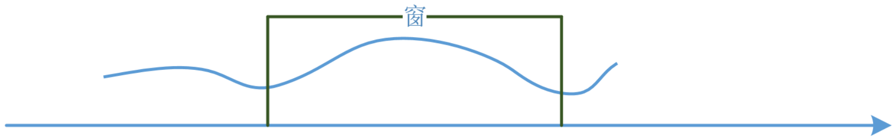
答案就是傅里叶变换。如果傅里叶变换得到的结果中，高频部分占主导，就说明这个函数变化比较剧烈。但是傅里叶变换只能看到整体的信号变化速率，你不知道变化快的部分出现在什么位置。而导数又过于精细，精确到了每个点，但是有些时候，我们又不需要那么精细。比如一个信号：

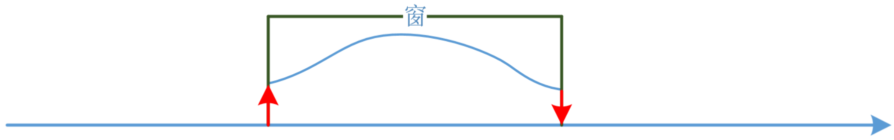


a 和 b 处的导数相同，但是很明显它们属于不同频率段的正弦波上，所以仅凭导数不同无法体会信号的“频率”。

于是，出现了短时傅里叶变换 STFT，也就是说给每段信号单独做傅里叶变换，但是“每段”的长度也不能太小，否则会失去意义。类似海森堡不确定性原理，你无法同时获取某时刻一个粒子的位置和动量（你可以选择去观察这个电子的动量，你也可以去观察电子的位置，但是你无法同时观察到这两个属性，这与你的测量工具没有任何关系 [2]）——你也无法同时获取信号在精准时刻的频率（真正的瞬时频率），要么你获得信号在某一段的频率，要么你获得它在时域上的变化情况。

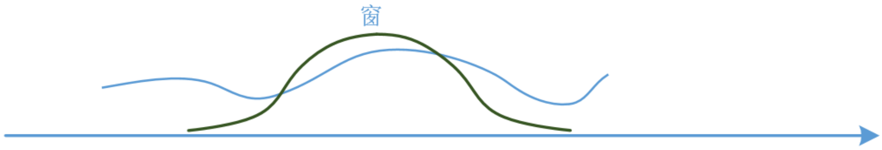
根据测不准原理在信号上的描述，你的测量工具（时间-频率分析）一定是有最底线的，你不可能同时把时间维度和频率维度都分析得绝对好。我们把一个大的信号进行分段，但是如果直接按照两边完全截断的方式来做“窗”，就相当于引入了单位阶跃函数，信号从 0 瞬间窜到分段后的起始值：





当然，在做 DFT 时，如果窗内信号开始和结尾值相同，则并不会造成什么影响（DFT 不会由此引入单位阶跃函数），但毕竟是特例。

为此，我们需要应用 Gabor 变换（加类高斯窗的 STFT）来缓解这个问题，类高斯窗虽然性质更好，但它具有“模糊性”，“窗”外的信号对“窗”内的傅里叶变换也会有一些影响，所以分析能力会受限：



小波分析同样会受到测不准原理的影响，但是它提供了看待问题的新的角度。我们把这些问题的具体分析放在以后再进行讲解。

本文作为小波分析的起始篇，不会介绍过多理论性的内容，而是介绍一下小波和信号空间的知识。

二 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 空间

在线性代数中，我们了解到了向量空间与基，这里我们再对“空间”这个概念进行一下扩展，定义由函数构成的空间——函数空间。

2 1 有限能量信号（函数）与 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 空间

要一个函数能量有限，则它趋近于正负无穷时，函数值必须趋近于 0，也就是通俗上说的“衰减得足够快”。用数学方式来表示，就是对于一个能量有限函数（这个函数可能是复数函数）：

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt < \infty \tag{二.1}$$

我们对函数的自变量做一些限制，即要求函数自变量是实数，而函数值可以是复数：

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \tag{二.2}$$

例如：

$$f(x) = e^{ix}, \qquad x \in \mathbb{R} \tag{二.3}$$

$\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 空间定义如下：

$$\mathcal{L}^2(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt < \infty \right\} \tag{二.4}$$

2 2 测量集

在计算一个函数是否是能量有限时，会用到积分，但有些情况下积分并不很明确，例如函数中处处为 0，但是某个点不为 0，那该怎么计算积分呢？则此时就需要引入测量集 (measurable sets)，详情可以参考测度论的内容，但我们暂时并不需要太多这方面的基础。

单个点的测度 (measure) 是 0，有限数量的点测度当然也是 0，因此，如果一个函数 $f(t)$ 与另一个函数 $g(t)$ 相等，则我们认为它们在除了某些测度 0 的点处其他位置处处相等。同理，如果一个函数属于 **0** 函数，则说明除了某些测度 0 的点其他位置该函数的值都是 0。

2 3 函数的支撑 (support)

一个函数的支撑就是它大于 0 的部分：

$$support(f) = \left\{ t \in R \;\middle|\; f(t) \neq 0 \right\} \tag{二.5}$$

$\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 空间的函数的支撑可以是整个 $\mathbb{R}$，但当函数自变量趋近于无穷时，函数值会越来越小，而且下降速度“足够快”。

2 4 函数的内积

函数的内积相当于函数在另一个函数上的投影，设两个函数 $f(t), g(t) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$，它们的内积定义为：

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{g(t)}dt \tag{二.6}$$

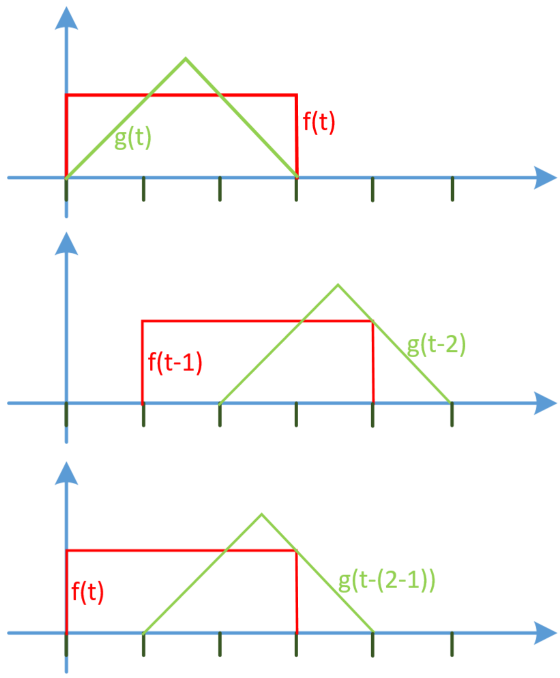
函数的模 (Norm) 定义为：

$$||f||^2 = \langle f(t), f(t) \rangle = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt \tag{二.7}$$

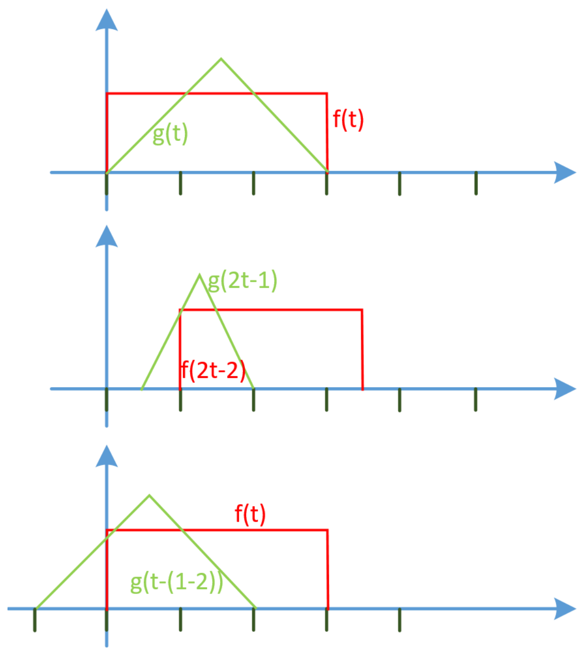
内积中的标量倍乘 (Scalar Multiplication 二.8)、平移 (Translates 二.9) 和扩张 (Dilates 二.10)：

$$\begin{align}
&\langle c \times f(t), g(t) \rangle = c\langle f(t), g(t) \rangle \notag \\
&\langle f(t), c \times g(t) \rangle = \overline{c}\langle f(t), g(t) \rangle \tag{二.8} \\
&\langle f(t-k), g(t-l) \rangle = \langle f(t), g(t-(l-k)) \rangle \tag{二.9} \\
&\langle f(2^m t-k), g(2^m t-l) \rangle = 2^{-m}\langle f(t), g(t-(l-k)) \rangle \tag{二.10}
\end{align}$$

关于式 二.9 的图释：



关于式 二.10 的图释：



Cauchy-Schwarz 不等式：

$$\left|\langle f(t), g(t)\rangle\right| \leq ||f(t)|| \cdot ||g(t)|| \tag{二.11}$$

三角不等式：

$$||f(t)+g(t)|| \leq ||f(t)|| + ||g(t)|| \tag{二.12}$$

三　子空间、基与投影

3 1　子空间

假设有一个函数空间 $\mathcal{V}_1$，里面的函数 $f(t)$ 都是由一堆 box 函数倍乘并左右整数平移整数 k 得到：

$$box(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n box(t - k_n) \tag{三.1}$$

现在考虑另一个函数空间 $\mathcal{V}_2$，里面的函数 $g(t)$ 都是由一堆扩张一倍的 box 函数倍乘并左右平移偶数 $2k$ 得到：

$$box_2(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 2 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$
$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n box(t - 2 \times k_n) \tag{三.2}$$

可以感受到，$\mathcal{V}_1$ 包含有 $\mathcal{V}_2$ 中所有的函数，而且，$\mathcal{V}_2$ 中的运算对于加法是封闭的：

$$\begin{aligned} & c, d \in scalar \\ & g_1(t), g_2(t) \in \mathcal{V}_2 \Longrightarrow c \times g_1(t) + d \times g_2(t) \in \mathcal{V}_2 \end{aligned} \tag{三.3}$$

3 2　基

一个向量空间可以由一组基来唯一确定，同理，函数空间也可以由一组基函数来唯一确定。假设 $\mathcal{W}$ 是 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的子空间，假设 $\{e_k(t)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 是 $\mathcal{W}$ 内的一组基函数，则如果：

$$\langle e_j(t), e_k(t)\rangle = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases} \tag{三.4}$$

则这组基是正交标准基。在 $\mathcal{W}$ 里的任何函数都可以写成用这组正交标准基来表示的形式：

$$f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e_k(t) \tag{三.5}$$

其中：

$$a_k = \langle f(t), e_k(t)\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{e_j(t)}dt \tag{三.6}$$

3 3　投影

投影也是向量中一个很重要的概念，在函数空间也是类似，例如 $\mathcal{W}$ 是 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的子空间，则定义一个投影 $P : \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{W}$。

设 $\{e_k(t)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 是 $\mathcal{W}$ 内的一组单位正交基。投影也可以这么写：

$$P(g(t)) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle g(t), e_k(t)\rangle e_k(t) \tag{三.7}$$

对于全部的 $f(t) \in \mathcal{W}$，我们都有：$P(f(t)) = f(t)$。

对于 $g(t) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$，我们还可以定义投影的范数 (Norm)：

$$||P(g(t))||^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle g(t), e_k(t)\rangle|^2 \tag{三.8}$$

以及投影的上界 (Upper Bound)：

$$||P(g(t))|| \le ||g(t)|| \tag{三.9}$$

毕竟 $\{e_k(t)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 是单位正交基，所以投影到更小的空间里以后，其函数的范数只会更小。

其实，$P(g(t))$ 就是投影 $P : \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \to \mathcal{W}$，即把 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 空间中的函数 $g(t)$ 投影到子空间 $\mathcal{W}$ 中。

四　小波与空间的关系

在结尾，我打算写一写关于小波和空间、投影之间的关系。

小波和加窗傅里叶变换的根本不同点在于，它的尺度是变化的，不像傅里叶变换永远都是不同频率的正弦波组合。小波信号的这种尺度变化性并不能说它的分析能力高于傅里叶变换（实际上，都会受到测不准原理的限制），但是它可以给信号的分析提供另一个角度，这也是多分辨分析同样能应用广泛的一个重要的原因。

当信号被分解为不同尺度的小波表示时，实际上就是投影到了不同的子空间里，把所有的子空间合并，就是整个 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 空间。而子空间的拆分方式是合情合理的，可以简单理解为把信号空间分解成了不同频率表示的部分。注意，傅里叶变换也可以这么分解，比如频率高于某值划分为一类子空间，低于某值划分为另一类子空间，然后把频率较低的类别的子空间再进行划分（这非常像离散小波变换）。由此可知，小波的空间划分并不是史无前例的，但小波的重要性在于其性质和定理证明中发现的一些优良特性。

短时傅里叶变换（Gabor 变换）会加高斯窗，而小波也不是完美的，它也是在中间振动剧烈，两边振幅较弱的函数，但我们并不能因此就说它优于加窗傅里叶变换，因为正弦波加个高斯窗以后也呈现出小波振动的样式。在数学推导的加持下，小波变换确实有傅里叶变换所不具备的功能（尤其是正交小波分析的离散性）。

在分析小波时，一定要结合傅里叶变换与低通带通滤波器设计思想来理解，思考它们之间的联系以及区别。

参考文献

[1] [https://zhuanlan.zhihu.com/p/22450818]

[2] [https://www.zhihu.com/question/26866591/answer/1677562131]

[3] Ruch D K , Fleet P V . Wavelet Theory: An Elementary Approach with Application[M]. John Wiley & Sons, 2009.