拉普拉斯变换

Dezeming Family

2022 年 4 月 23 日

DezemingFamily 系列书和小册子因为是电子书，所以可以很方便地进行修改和重新发布。如果您获得了 DezemingFamily 的系列书，可以从我们的网站 [https://dezeming.top/] 找到最新版。对书的内容建议和出现的错误欢迎在网站留言。

目录

一　拉普拉斯变换的引入

LTI 系统对复指数信号的响应仍然是一个复指数信号，只是幅度会有变化。如果系统对一个信号的输出响应仅仅是一个常数乘以输入，那么这个信号就是系统的特征函数 (eigenfunction)，而幅度就是系统的特征值 (eigenvalue)（注意这里的描述，和线性代数中是基本一致的）。我们设 $h(t)$ 和 $h[n]$ 分别是连续时间和离散时间系统的单位冲激响应。

1 1　连续时间

对于连续时间而言，设输入 $x(t)=e^{st}$，则：

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau \\ &= e^{st}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau \\ &= H(s)e^{st} \end{aligned} \tag{一.1}$$

其中，$H(s)$ 与 t 无关，对于确定的 s 来说是一个定值。

我们简写为：

$$input:\ e^{st} \qquad\qquad output:\ H(s)e^{st} \tag{一.2}$$

1 2　离散时间

对于离散时间而言：

$$input:\ z^{n} \qquad\qquad output:\ H(z)z^{n} \tag{一.3}$$

对于离散时间而言，设输入 $x[n]=z^n$，则：

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{n-k} \\ &= z^n\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{-k} \\ &= H(z)z^n \end{aligned} \tag{一.4}$$

其中，$H(z)$ 与 n 无关，对于确定的 z 来说是一个定值。

我们简写为：

$$input:\ z^{n} \qquad\qquad output:\ H(z)z^{n} \tag{一.5}$$

1 3　拉氏变换的引入

对于连续情况下的傅里叶变换，令 $s=j\omega$，就得到了：

$$y(j\omega)=H(j\omega)e^{j\omega t} \tag{一.6}$$

对于离散情况下的傅里叶变换，令 $z=e^{j\omega}$，就得到了：

$$y[e^{j\omega}]=H(e^{j\omega})e^{j\omega n} \tag{一.7}$$

相信现在可能你对为什么要用 $H(j\omega)$ 作为连续傅里叶变换的符号，以及用 $H(e^{j\omega})$ 表示离散傅里叶变换的符号有了更深的认识——傅里叶变换的复指数函数只是 LTI 系统的这个特征函数的一种特例罢了。我们现在回到最初的状态，即拉普拉斯变换。

二　拉氏变换的基本概念

我们上一节定义的 $H(s)$ 即：

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau \tag{二.1}$$

由此定义 $x(s)$ 的拉氏变换：

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt \tag{二.2}$$

我们来进一步思考一下拉氏变换，用 $s = \sigma + j\omega$（注意这里的 ω 只是为了看起来更方便和好理解，可以不必局限于“频率”）。

$$\begin{aligned} X(\sigma + j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(x(t)e^{-\sigma t}\Big)e^{-j\omega t}dt \end{aligned} \tag{二.3}$$

这相当于原信号乘以一个实指数信号，然后再做傅里叶变换。该指数信号由于不同的 σ 值，可以设置是衰减的，也可以是增加的。

三　收敛性

傅里叶变换不一定收敛，需要保证信号要么是周期信号，要么是非周期但是能量有限的信号。如果一个信号“很大”，那么傅里叶变换也不会得到相应的值。

由于拉氏变换相当于原信号乘以一个实指数信号，所以，如果这个实指数信号是衰减的，那么就可能使得原来不能进行傅里叶变换的信号可以进行拉氏变换。例如某信号：$x(t) = e^{-at}u(t)$，当 $a <= 0$ 时，不能进行傅里叶变换。但是，当 $\sigma + a > 0$ 时，即：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Big(u(t)e^{-(\sigma+a)t}\Big)e^{-j\omega t}dt \tag{三.1}$$

则也就是说 $u(t)e^{-(\sigma+a)t}$ 可以进行傅里叶变换，即 $x(t)$ 此时可以进行拉式变换。

我们要考虑的是，虽然 $x(t)$ 可以做拉式变换，但并不是在任何位置都能收敛的，比如上面的例子就是要在 $\sigma + a > 0$ 时才能收敛。为此我们将拉氏变换可以收敛的 s 值范围称为拉氏变换收敛域。在上面的例子中，收敛域并不限制 ω，但是要求 $\sigma > -a$，因此收敛域就是 $\sigma > -a$。

3 1　零点与极点

我们给出 [1] 中的例子，对信号做拉氏变换后会得到有理多项式：

$$\begin{aligned} & x(t) = \big[e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-(1-3j)t} + \frac{1}{2}e^{-(1+3j)t}\big]u(t) \\ & X(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\big(\frac{1}{s+(1-3j)} + \frac{1}{s+(1+3j)}\big) = \frac{2s^2+5s+12}{(s^2+2s+10)(s+2)} \end{aligned} \tag{三.2}$$

这个例子可以看出，信号 $x(t)$ 的收敛域是三个子信号收敛域的交集，为：

$$\big(\mathcal{R}\rceil\{s\} > -2\big) \cap \big(\mathcal{R}\rceil\{s\} > -1\big) \cap \big(\mathcal{R}\rceil\{s\} > -1\big) = \big(\mathcal{R}\rceil\{s\} > -1\big) \tag{三.3}$$

思考一下，当分子或分母为 0 时会怎么样？

我们称分子为 0 时的 s 为 $X(s)$ 的零点，分母为 0 时的 s 为极点。需要注意的是，当 s 趋近于无穷时，$X(s)$ 为 0，则无穷处就是 $X(s)$ 的零点；当 s 趋近于无穷时，$X(s)$ 为 ∞，则无穷处就是 $X(s)$ 的极点。一般来说，拉氏变换的极点和零点数相同，因此，如果分母是 k 次多项式，分子是 $k+l$ 次多项式，则无穷远处有 l 阶极点；反之，如果分子是 k 次多项式，分母是 $k+l$ 次多项式，则无穷远处有 l 阶零点。

对于 l 阶零点，$l>1$ 时，我们给出一个例子：

$$X(s)=\frac{(s-1)^2}{(s+1)(s-2)} \tag{三.4}$$

该式 $s=1$ 为两阶零点。

收敛域之间不会包含任何极点，这是因为极点处，拉普拉斯变换为无穷，如果极点出现在收敛域中，就说明当收敛域中的 s 靠近极点时，拉氏变换结果会不断变大，趋近于无穷，这是不合理的。

3 2 收敛域的一些性质

第一，$X(s)$ 的收敛域一定是平行于 $j\omega$ 轴（虚轴）的条带状区域。这是因为 $X(s)$ 的收敛域只跟 s 的实部有关，对于 $e^{-(\sigma+j\omega)t}$，虚部 $j\omega$ 并不会影响其收敛性。

第二，我们上面说过，拉氏变换收敛域内没有极点。如果 $X(s)$ 是有理的，那么收敛域是被极点所界定或者延伸到无穷远处。

第三，信号 $x(t)$ 是有限持续期的，并且绝对可积，则收敛域是整个 s 平面。注意有限持续期，即当 $e^{-st}=e^{-(\sigma+j\omega)t}$，即使 $\sigma<0$，在 $x(t)$ 的持续期外，$x(t)e^{-st}=0$，因此收敛。

这些性质其实都是可以通过理解的方式来感受的，并不需要严格的证明。

四 逆变换

拉氏变换的逆变换可以根据傅里叶变换的方法来求：

$$\begin{aligned}X(\sigma+j\omega)&=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt\\ \Longrightarrow x(t)e^{-\sigma t}&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(\sigma+j\omega)e^{j\omega t}d\omega\\ \Longrightarrow x(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(\sigma+j\omega)e^{(\sigma+j\omega)t}d\omega\end{aligned} \tag{四.1}$$

当我们固定 σ 为一个常数时，令 $s=\sigma+j\omega$，则 $ds=jd\omega$，由此得到：

$$\begin{aligned}x(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}X(s)e^{st}\frac{ds}{j}\\ &=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}X(s)e^{st}ds\end{aligned} \tag{四.2}$$

积分路径相当于 $\mathcal{R}]\{s\}=\sigma$ 的全部 s 点构成的这条直线，在收敛域内，可以选任何的 σ 值来进行计算。

有些时候，我们不需要直接去计算四.2，而是可以通过拆分的方式分开计算。例如：

$$\begin{aligned}X(s)&=\frac{1}{(s+1)(s+2)},\quad \mathcal{R}]\{s\}>-1\\ \Longrightarrow X(s)&=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}\end{aligned}$$

由于收敛域 $\mathcal{R}]\{s\}>-1$，我们也需要严格限制拆分后各项的收敛域。因此 $x(t)$ 就比较容易得到：

$$\begin{aligned}e^{-t}u(t)&\longleftrightarrow\frac{1}{s+1}\qquad \mathcal{R}]\{s\}>-1\\ e^{-2t}u(t)&\longleftrightarrow\frac{1}{s+2}\qquad \mathcal{R}]\{s\}>-2\\ \Longrightarrow x(t)&=e^{-t}u(t)-e^{-2t}u(t)\end{aligned} \tag{四.3}$$

如果 $X(s)$ 的收敛域变为 $-2 < \mathcal{R}\rceil\{s\} < -1$，则：

$$\begin{aligned}
& - e^{-t}u(-t) \longleftrightarrow \frac{1}{s+1} \quad \mathcal{R}\rceil\{s\} < -1 \\
& e^{-2t}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s+2} \quad \mathcal{R}\rceil\{s\} > -2 \\
& \Longrightarrow x(t) = -e^{-t}u(-t) - e^{-2t}u(t)
\end{aligned} \tag{四.4}$$

参考文献

[1] Signals and Systems Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, with S. Hamid Nawab. Prentice Hall, 2013.