离散信号的周期卷积与线性卷积

Dezeming Family

2022 年 4 月 16 日

DezemingFamily 系列书和小册子因为是电子书，所以可以很方便地进行修改和重新发布。如果您获得了 DezemingFamily 的系列书，可以从我们的网站 [https://dezeming.top/] 找到最新版。对书的内容建议和出现的错误欢迎在网站留言。

目录

一 离散周期信号的傅里叶级数与周期卷积

1 1 周期卷积

设有两个周期离散信号（周期都是 N）$\tilde{x}_1[n]$ 与 $\tilde{x}_2[n]$，它们的傅里叶级数的系数分别是 $\tilde{X}_1[k]$ 和 $\tilde{X}_2[k]$。如果将傅里叶级数相乘：

$$\tilde{X}_3[k] = \tilde{X}_1[k]\tilde{X}_2[k] \tag{一.1}$$

则以 $\tilde{X}_3[k]$ 为傅里叶级数系数的周期序列 $\tilde{x}_3[n]$ 为：

$$\tilde{x}_3[n] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m]\tilde{x}_2[n-m] \tag{一.2}$$

卷积只在一个周期里进行，所以叫周期卷积。它也是可以交换的：

$$\tilde{x}_3[n] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_2[m]\tilde{x}_1[n-m] \tag{一.3}$$

同时，还有对偶性。若：

$$\tilde{x}_3[n] = \tilde{x}_1[n]\tilde{x}_2[n] \tag{一.4}$$

则 $\tilde{x}_3[n]$ 对应的傅里叶级数是：

$$\tilde{X}_3[k] = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} \tilde{X}_1[l]\tilde{X}_2[k-l] \tag{一.5}$$

1 2 证明

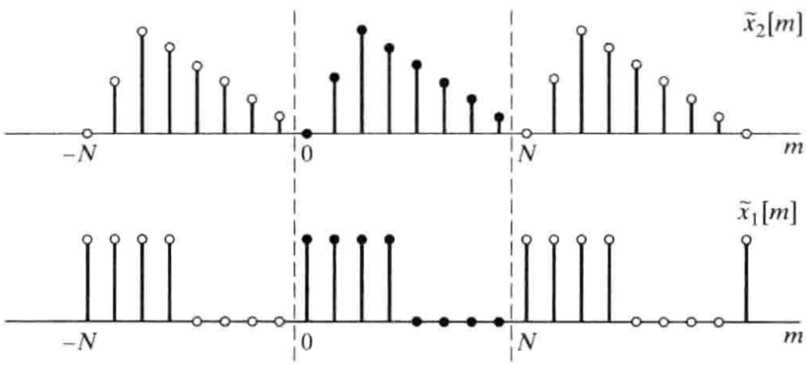
证明较为简单。我们求一下 $\tilde{X}_3[k]$：

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_3[k] &= \sum_{n=0}^{N-1}\Big(\sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m]\tilde{x}_2[n-m]\Big)W_N^{kn} \\
&= \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m]\Big(\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}_2[n-m]W_N^{kn}\Big) && (一.6) \\
&= \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m]\Big(W_N^{km}\tilde{X}_2[k]\Big) && (一.7) \\
&= \tilde{X}_2[k]\Big(\sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m]W_N^{km}\Big) \\
&= \tilde{X}_1[k]\tilde{X}_2[k]
\end{aligned}$$

其中，第一.6步和一.7步利用了傅里叶级数的移位特性。

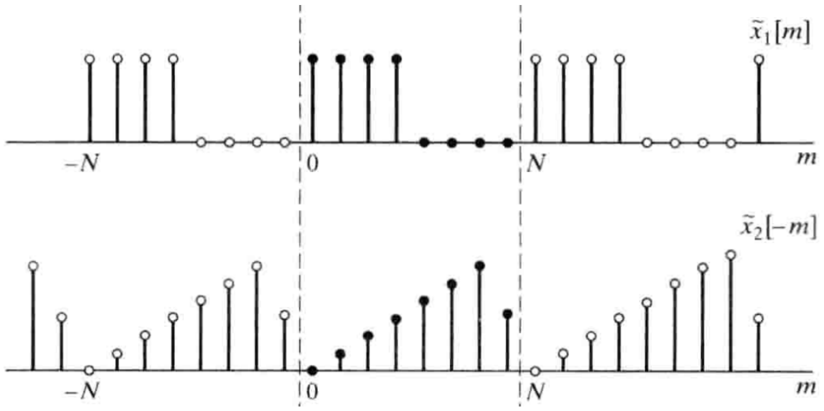
1 3 一个例子

以 [1] 中的例子为例，假设有两个周期序列 $\tilde{x}_1[n]$ 与 $\tilde{x}_2[n]$：

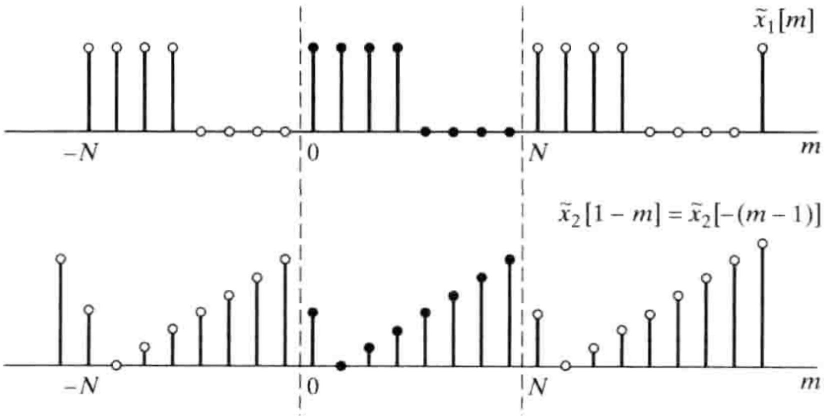


而周期卷积，就是在一个周期里，$\tilde{x}_1[m]$ 分别与 $\tilde{x}_2[-m]$、$\tilde{x}_2[-m+1]$ 等信号乘加。

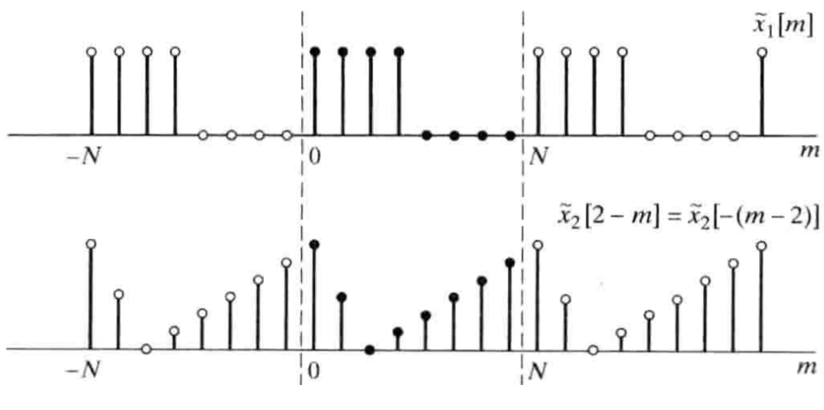
$$\tilde{x}_3[0]=\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1[m]\tilde{x}_2[-m] \tag{一.8}$$



$$\tilde{x}_3[1]=\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1[m]\tilde{x}_2[1-m] \tag{一.9}$$



$$\tilde{x}_3[2]=\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1[m]\tilde{x}_2[2-m] \tag{一.10}$$

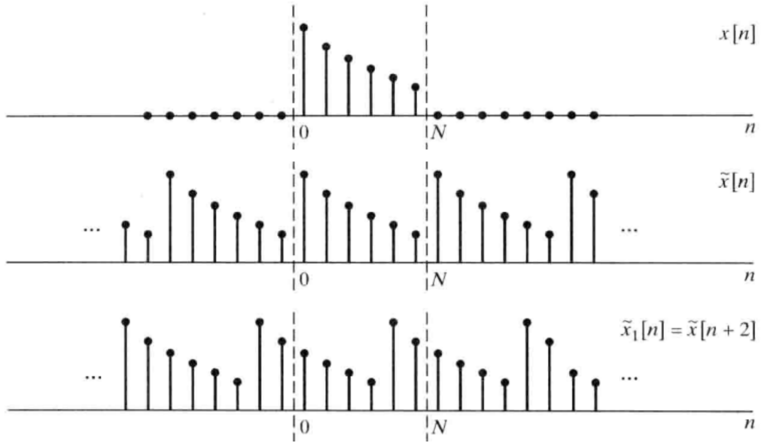


二　DFT 与循环移位

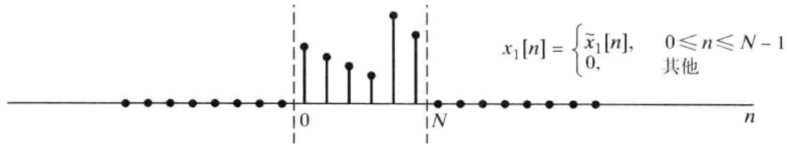
虽然循环卷积和循环移位并不同，但思想都是一样的。在做离散傅里叶变换时，信号都是有限长的（设傅里叶变换），因此移位性质不能简单用移位得到，而是循环移位，比如循环移动 m 位：

$$x[((n-m))_N],\quad 0\le n\le N-1 \longleftrightarrow e^{-j\frac{2\pi k}{N}m}X[k]=W_N^{m}X[k] \tag{二.1}$$

这里的 $x[((n-m))_N]$ 表示有限长度为 N 的序列循环移位 m 以后值（比如这里 $N=6, m=2$）：



所以，$x[((n-2))_N]$ 就表示为：



三　DFT 与循环卷积

其实循环卷积我们在前面已经介绍过，这里我们从 DFT 的角度再看一下。两个有限长长度为 N 的序列 $x_1[n]$ 与 $x_2[n]$，傅里叶变换是 $X_1[k]$ 和 $X_2[k]$，设：

$$X_3[k]=X_1[k]X_2[k] \tag{三.1}$$

设 $x_3[n]$ 的 DFT 是 $X_3[k]$，则 $x_3[n]$ 就是周期卷积的结果：

$$x_3[n]=\sum_{m=0}^{N-1} x_1[m]x_2[((n-m))_N] \tag{三.2}$$

同理，DFT 也有对偶性，若：

$$x_3[n]=x_1[n]x_2[n] \tag{三.3}$$

则其 DFT 结果为：

$$X_3[k]=\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} X_1[l]X_2[((k-l))_N] \tag{三.4}$$

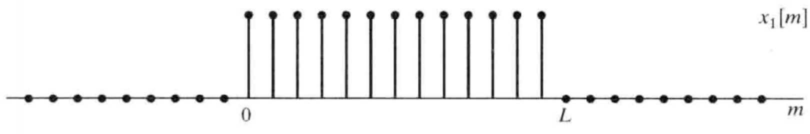
四　DFT 与线性卷积

我们已经知道，对于有限长序列 $x_1[n]$ 与 $x_2[n]$（设长度都是 N），它们的 DFT 结果相乘得到的 DFT 值是周期卷积的 DFT，那么有什么办法可以获得线性卷积的结果呢？我们可以想象，它们有值的长度都是 N，如果我们设其卷积的周期为 $2N$，这样得到的结果会不会就是线性卷积的结果了？

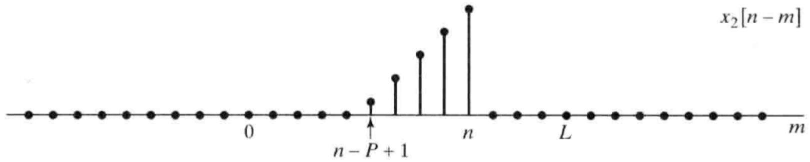
答案是肯定的，大家自己画个图就能明白。但是我们希望得到更一般的结果。

设 $x_1[n]$ 长度为 L，$x_2[n]$ 长度为 P，则只要 DFT 长度 N 满足 $N\geq L+P-1$，则对应的 DFT $X_1[k]X_2[k]$ 的逆变换结果就等于 DTFT $X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega})$ 的逆变换结果。

信号 $x_1[n]$ 和 $x_2[-n]$ 分别如下：



我们来看卷积（取反加 n）：



于是得证（当 $n = L + P - 1$ 时，两个信号就再也没有交叠的地方，从而卷积结果都是 0 了）。注意，如果信号并不是从 0 开始的，要转化为从 0 开始，或者用其他的处理手段（信号移位等）。

参考文献

[1] Signals and Systems Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, with S. Hamid Nawab. Prentice Hall, 2013.