离散傅里叶变换 DFT

Dezeming Family

2021 年 4 月 13 日

DezemingFamily 系列书和小册子因为是电子书，所以可以很方便地进行修改和重新发布。如果您获得了 DezemingFamily 的系列书，可以从我们的网站 [https://dezeming.top/] 找到最新版。对书的内容建议和出现的错误欢迎在网站留言。

目录

一　离散周期序列的傅里叶级数

离散傅里叶系数缩写为 DFS。

我们用上标 $\sim$ 表示周期信号，例如某周期信号 $\tilde{x}[n]$。若 $\tilde{x}[n]$ 的周期为 N，则其傅里叶级数为：

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \tag{一.1}$$

其实求和项可以不从 0 到 $N-1$，只要是连续的一个周期就可以，比如 2 到 $N+1$。可以看到，$\tilde{X}[k]$ 也是一个周期信号，周期同样为 N。

根据级数求 $\tilde{x}[n]$ 的公式为：

$$\tilde{x}[n] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \tag{一.2}$$

为了表示更简单，符号简化为：

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} \tag{一.3}$$

于是，分析式与合成式分别表示为：

$$\begin{aligned} \tilde{X}[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] W_N^{kn} \\ \tilde{x}[n] &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{X}[k] W_N^{-kn} \end{aligned} \tag{一.4}$$

二　离散周期序列的傅里叶变换

对于非周期信号来说通常会写成傅里叶变换的形式，这并不是说周期信号没有傅里叶变换，只是我们只需要离散的点就可以。但我们也会去表示成傅里叶变换的形式，去探究一些性质。

一个序列要想做傅里叶变换，这个序列需要能量有限，即该序列是平方可加的。周期序列很显然不满足这个条件，但是使用一个脉冲串就可以表示成傅里叶变换的形式（如果要准确地证明则会涉及到广义函数理论的内容）。

对于周期为 N 的信号 $\tilde{x}[n]$ 的傅里叶级数为 $\tilde{X}[k]$，$\tilde{x}[n]$ 的傅里叶变换可以写为 $\tilde{X}(e^{j\omega})$（导出方法见《周期信号的傅里叶变换：连续时间与离散时间》）：

$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi}{N} \tilde{X}[k] \delta\big(\omega - \frac{2\pi k}{N}\big) \tag{二.1}$$

在《周期信号的傅里叶变换：连续时间与离散时间》中给出过关于 $x[n] = e^{j\omega_0 n}$ 的傅里叶变换的正确性，我们在这里给出完整的正确性证明：

$$\frac{1}{2\pi} \int_{0-\epsilon}^{2\pi-\epsilon} \tilde{X}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{0-\epsilon}^{2\pi-\epsilon} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi}{N} \tilde{X}[k] \delta\big(\omega - \frac{2\pi k}{N}\big) e^{j\omega n} d\omega \tag{二.2}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi}{N} \tilde{X}[k] \int_{0-\epsilon}^{2\pi-\epsilon} \delta\big(\omega - \frac{2\pi k}{N}\big) e^{j\omega n} d\omega \tag{二.3}$$

其中，$0 < \epsilon < \frac{2\pi}{N}$，之所以不是在 $0, 2\pi$ 上进行积分，是因为在 $\omega = 0$ 和 $\omega = 2\pi$ 处都有脉冲，我们很难去处理这种情况。由于在 $0-\epsilon, 2\pi-\epsilon$ 范围内只包括 $k = 0, 1, ..., (N-1)$ 的脉冲，所以可以写为：

$$\frac{1}{2\pi} \int_{0-\epsilon}^{2\pi-\epsilon} \tilde{X}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \tag{二.4}$$

注意在将有限长序列变为周期序列的时候，比如有限长序列长度为 N，那么设其在整个无限信号的范围是 $0-N-1$，即：

$$x[n]=\begin{cases}\tilde{x}[n], & 0\le n\le N-1\\ 0, & otherwise\end{cases} \tag{二.5}$$

拓展到周期序列时周期一般定为 N（当然也可以设置为大于 N 的任何整数，但定义为 N 最直接也最简单）。

三　傅里叶变换采样

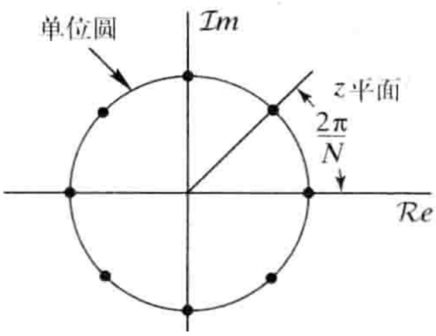
我们可能会注意到，离散非周期信号的傅里叶变换是周期为 2π 的连续函数，而离散周期信号的傅里叶级数周期为 N，但由于复指数系数 $\frac{2\pi}{N}$ 的关系，好像周期也是与 2π 有关的样子。如果我们对离散非周期信号的傅里叶变换进行采样，结果会如何呢？本节就是在研究非周期序列与周期序列之间的更广泛的关系。

注意，对于连续信号，连续非周期信号的傅里叶变换经过采样以后，得到离散非周期信号，此时离散非周期信号的傅里叶变换为周期 2π 的函数。

考虑一个非周期序列 $x[n]$，其傅里叶变换为 $X(e^{j\omega})$，假设序列 $\tilde{X}[k]$ 是对 $X(e^{j\omega})$ 在 $\omega_k=\frac{2\pi k}{N}$ 处采样得到的：

$$\tilde{X}[k]=X(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) \tag{三.1}$$

这相当于在单位圆上等间隔采样（这个序列也是周期的，例如 $k=N$ 和 $k=0$ 结果是一样的），我们以 $N=8$ 为例：



由于 $\tilde{X}[k]$ 是一个周期序列，可以看做是一个序列 $\tilde{x}[n]$ 的傅里叶级数序列。写为：

$$\begin{aligned}\tilde{X}[k]&=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}[n]W_N^{kn}\\ \tilde{x}[n]&=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{X}[k]W_N^{-kn}\end{aligned} \tag{三.2}$$

对于这个非周期信号 $x[n]$，假设其存在傅里叶变换：

$$X(e^{j\omega})=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x[m]e^{-j\omega m} \tag{三.3}$$

于是可以得到（$\omega_k=\frac{2\pi k}{N}$）：

$$\begin{aligned}\tilde{x}[n]&=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\Big(\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x[m]e^{-j\frac{2\pi k}{N}m}\Big)W_N^{-kn}\\ &=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x[m]\Big[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}W_N^{-k(n-m)}\Big]\\ &=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x[m]\tilde{p}[n-m]\end{aligned} \tag{三.4}$$

其中，$\tilde{p}[n-m]$ 可以看做周期脉冲串的傅里叶表示：

$$\tilde{p}[n-m]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}W_N^{-k(n-m)}=\sum_{r=-\infty}^{+\infty}\delta[n-m-rN] \tag{三.5}$$

所以 $\tilde{x}[n]$ 可以写为：

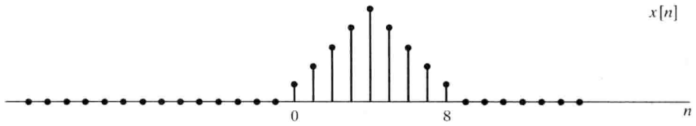
$$\tilde{x}[n]=x[n]*\sum_{r=-\infty}^{+\infty}\delta[n-rN]=\sum_{r=-\infty}^{+\infty}x[n-rN] \tag{三.6}$$

我们来分析一下该式，假设 $n=2$，则：

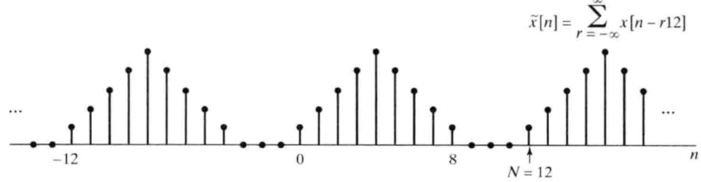
$$\tilde{x}[2]=x[2]*\sum_{r=-\infty}^{+\infty}\delta[2-rN]=\sum_{r=-\infty}^{+\infty}x[2-rN] \tag{三.7}$$

也就是说，$\tilde{x}[2]$ 是全部 $x[2-rN]$ 的和。我们知道，傅里叶变换要求序列平方可加，在这里也得到了体现。

$x[n]$ 有限长时，比如设 $x[n]$ 的 $N_{x[n]}=9$：

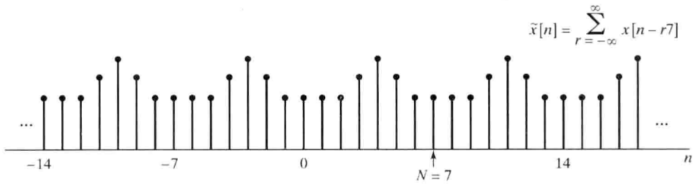


然后我们进行采样，设周期序列 $\tilde{x}[n]$ 的周期为 $N_{\tilde{x}[n]}=12$（这说明对 $X(e^{j\omega})$ 的采样周期是 12），则不会发生混叠现象：



(b)

若周期序列 $\tilde{x}[n]$ 的周期为 $N_{\tilde{x}[n]}=7$（这说明对 $X(e^{j\omega})$ 的采样周期是 7），则会发生混叠现象：



由于有限长序列 $x[n]$ 的傅里叶变换是一个连续函数，计算机无法进行表示，而对其傅里叶变换得到的采样值则是离散的，而且只要采样周期大于等于 N，就能恢复出原始信号，因此在对有限长序列做傅里叶变换时，其实一般会采用对 $\tilde{x}[n]$ 做傅里叶变换的方式，此时，叫做离散傅里叶变换 DFT。DFT 是广泛应用于计算机的方式，在很多应用，例如小波分析等也发挥了巨大的作用，原因就是在 J.W. 库利和 T.W. 图基提出快速傅里叶变换（FFT）以后，计算效率相当之高，因此可以把一大堆工作都放在频域中进行，然后逆变换回时域。

四　有限长序列的离散傅里叶变换

4 1　DFT 的定义

我们把上一节的内容总结一下。对于有限长序列 $x[n]$，其傅里叶变换为 $X(e^{j\omega})$。对其傅里叶变换采样以后得到的信号是周期信号 $\tilde{x}[n]$，周期为 N，则：

$$x[n]=\begin{cases}\tilde{x}[n], & 0\le n\le N-1\\ 0, & otherwise\end{cases} \tag{四.1}$$

此时的离散傅里叶变换 DFT：

$$X[k] = \begin{cases} \tilde{X}[k], & 0 \le k \le N-1 \\ 0, & otherwise \end{cases} \tag{四.2}$$

我们给出 DFT 的分析式与合成式：

$$X[k] = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}, & 0 \le k \le N-1 \\ 0, & otherwise \end{cases} \tag{四.3}$$

$$x[n] = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn}, & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & otherwise \end{cases} \tag{四.4}$$

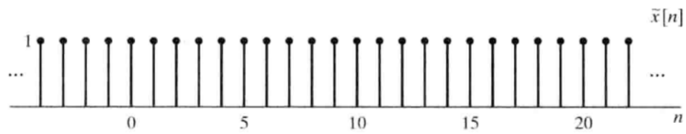
因此，我们认为只有在区间 $0, N-1$ 范围内是我们感兴趣的，其他区域的值我们并不关心。

4 2　第一个例子

假设某序列 $x[n]$ 的 $N = 5$：

(a)

扩展为周期为 5 的周期信号:

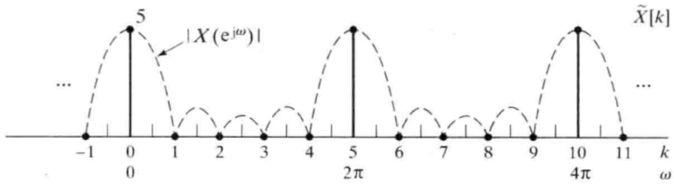


(b)

得到傅里叶级数：

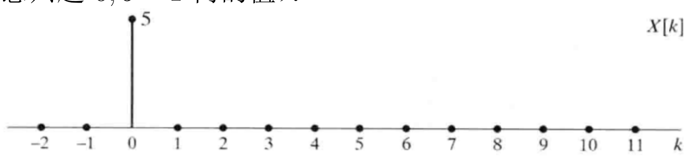
$$\begin{aligned} \tilde{X}[k] &= \sum_{n=0}^{4} e^{-j\frac{2\pi k}{5}n} = \frac{1-e^{-j2\pi k}}{1-e^{-j\frac{2\pi k}{5}}} \\ &= \begin{cases} 5, & k = 0, \pm 5, \pm 10, \ldots \\ 0, & otherwise \end{cases} \end{aligned} \tag{四.5}$$

傅里叶级数的图示为：



(c)

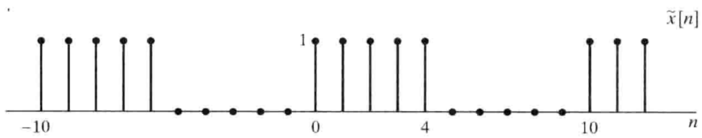
得到的 DFT 为（只感兴趣 $0, 5-1$ 内的值）：



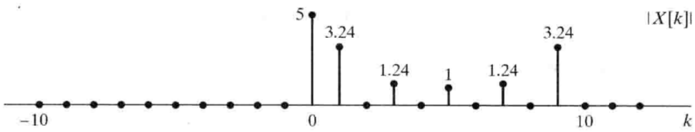
(d)

4 3　第二个例子

我们还是以上面的 $x[n]$ 为例，这次扩展为周期为 10 的信号：



得到的 DFT 为（只感兴趣 $0, 10-1$ 内的值）：



可以看到，即使是同样的有限长度序列，如果扩展为周期信号时周期不同，得到的离散傅里叶变换会有很大不同。

参考文献

[1] Signals and Systems Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, with S. Hamid Nawab. Prentice Hall, 2013.