采样定理

Dezeming Family

2021 年 12 月 15 日

DezemingFamily 系列书和小册子因为是电子书，所以可以很方便地进行修改和重新发布。如果您获得了 DezemingFamily 的系列书，可以从我们的网站 [https://dezeming.top/] 找到最新版。对书的内容建议和出现的错误欢迎在网站留言。

20211216：完成第一版。

20211218：增加了采样恢复中，采样点位置在理想低通滤波器下等于原始信号的内容。

20220429：增加了一些内插的解释和图示，包括临近插值和线性插值。

目录

一　采样的意义

离散时间信号的处理通常比连续时间信号要方便很多，因为我们的计算机系统就主要处理离散的信号，而且计算机信号分析软件是可以很容易复制和传播的（不像硬件滤波系统还得需要购买或者组装）。

我们知道，采样只要无限密集，其实就等同于得到整个连续的信号，但是这样不是很可取，因为需要海量的存储空间。基于一个重要理论，我们可以知道，我们不需要过于密集，只需要“足够密集”的采样，得到的一组样本就能完全恢复原来的信号，这个神奇的理论就是采样定理。

利用离散时间系统来处理连续信号的过程，其实就是：将连续时间信号通过采样得到离散时间信号 -> 将离散时间信号在离散时间系统中进行处理 -> 将处理好以后的信号变换回连续时间中。

二　采样定理

对于连续信号，我们一般会使用冲激串采样（这只是数学表示形式），其实就是每隔一个固定的时间 T 采样一个样本。公式是：

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\delta(t-nT) \tag{二.1}$$

根据傅里叶变换的相乘性质（这里的书 [1] 写错了，第二版 2013 年印刷）：

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\theta)P(j(\omega-\theta))d\theta \tag{二.2}$$

$$= \frac{1}{2\pi}X(j\omega) * P(j\omega) \tag{二.3}$$

我们求一下后面部分的傅里叶变换：

$$\mathcal{F}\Big\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)\Big\} = \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-k\omega_0) \tag{二.4}$$

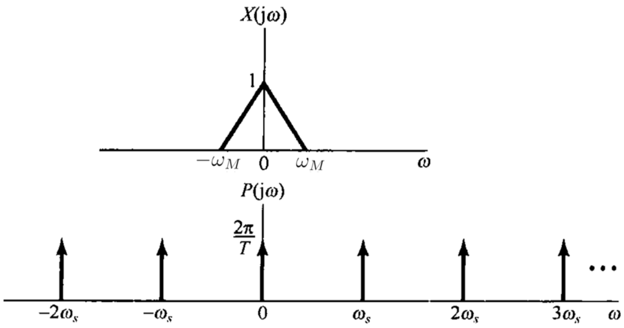
一个信号与单位冲激串的卷积就是该信号的移位：

$$X(j\omega) * \delta(\omega-\omega_0) = X(j(\omega-\omega_0)) \tag{二.5}$$

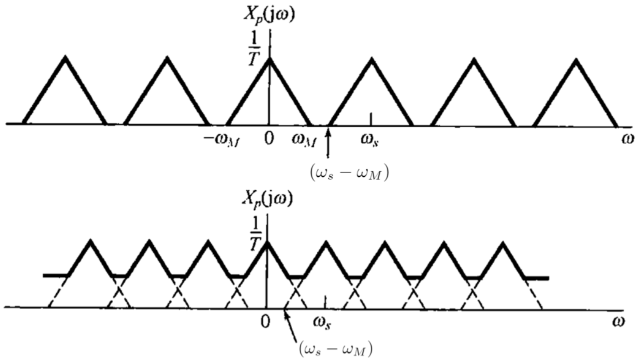
$$\Longrightarrow X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi}X(j\omega) * P(j\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(j(\omega-k\omega_0)) \tag{二.6}$$

$$= \frac{1}{T}\Big(\cdots + X(j(\omega-\omega_0)) + X(j(\omega)) + X(j(\omega+\omega_0)) + X(j(\omega+2\omega_0)) + \cdots\Big) \tag{二.7}$$

因此，设信号是有限带宽信号，最大频率是 ω_M，采样频率是 ω_s：



进行采样，就会出现下面两种情况：



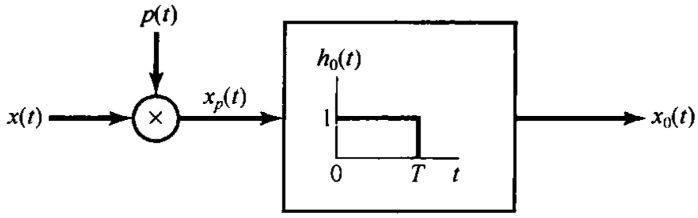
如果对应于第一种情况，信号就可以使用一个低通滤波器进行恢复。而如果对应于第二种情况，信号采样后发生了混淆现象，就没法再恢复为原来的信号。

我们现在就能明白：如果一个带宽有限的连续时间信号的带宽在 $[-\omega_M, \omega_M]$ 之内，只要我们使用采样频率 $\omega_s > 2\omega_M$，采样到的样本就可以完全确定原始的连续时间信号。

三　实际的采样方法

冲击信号是很难产生的，因此考虑实际情况，会选择“零阶保持”的方法来采样信号。

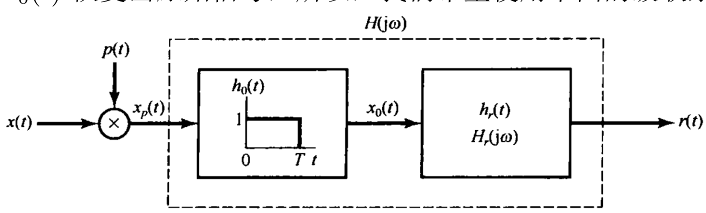
也就是每个间隔都是采样并保持一个瞬时值。这个过程其实就可以看做是先使用冲激串采样（周期为 T），然后再经过一个具有矩形单位冲激响应的 LTI 系统得到：



可以计算得到（先计算 $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ 之间的矩形信号，然后再通过时移性质得到）：

$$H_0(j\omega) = e^{-j\omega\frac{T}{2}}\left[\frac{2\sin(\omega\frac{T}{2})}{\omega}\right] \tag{三.1}$$

我们希望从得到的 $x_0(t)$ 恢复出原始信号，所以，我们希望使用下面的级联系统：



若我们希望 $r(t) = x(t)$，我们把 h_0 和 h_r 看做一个整体系统 h（频率响应是 $H(j\omega)$），则 h_r 应该满足的关系是：

$$H_r(j\omega) = \frac{e^{j\omega\frac{T}{2}}H(j\omega)}{\frac{2\sin(\omega\frac{T}{2})}{\omega}} \tag{三.2}$$

四　从样本重建信号

我们已经说过，只要采样率足够高，就能把原始信号重建出来。我们把恢复出原始信号的过程叫做内插。

其实零阶保持就是内插的一种，只不过显而易见，它的内插结果不是很好罢了。

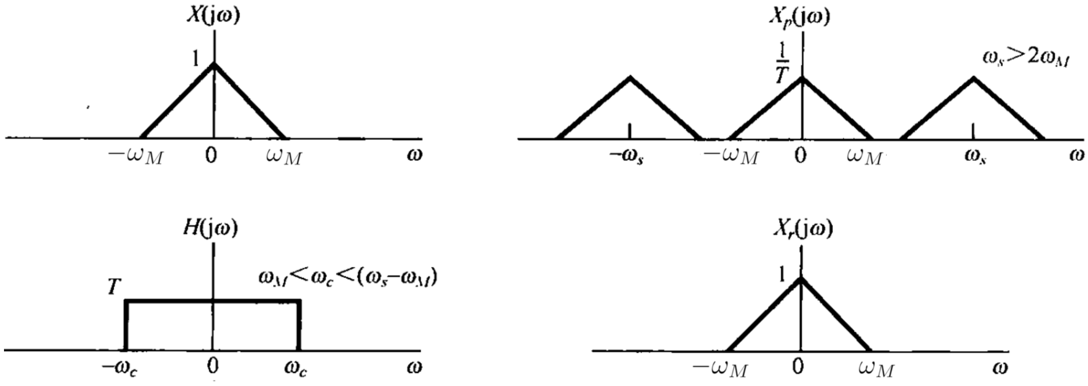
根据前面的描述，我们知道其实使用低通滤波器就可以重建原始信号，设输出为 $x_r(t)$，则：

$$x_r(t) = x_p(t) * h(t) \tag{四.1}$$

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\delta(t-nT) \tag{四.2}$$

$$\Longrightarrow x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)h(t-nT) \tag{四.3}$$

在频域上就是下面的样子：



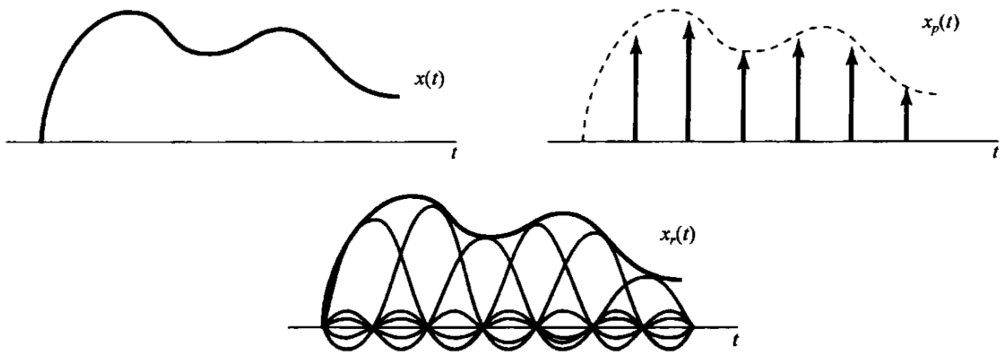
得到的 $h(t)$ 为：

$$h(t) = \frac{\omega_c T \sin(\omega_c t)}{\pi \omega_c t} \tag{四.4}$$

因此 $x_r(t)$ 就是：

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\frac{\omega_c T}{\pi}\left(\frac{\sin(\omega_c(t-nT))}{\omega_c(t-nT)}\right) \tag{四.5}$$

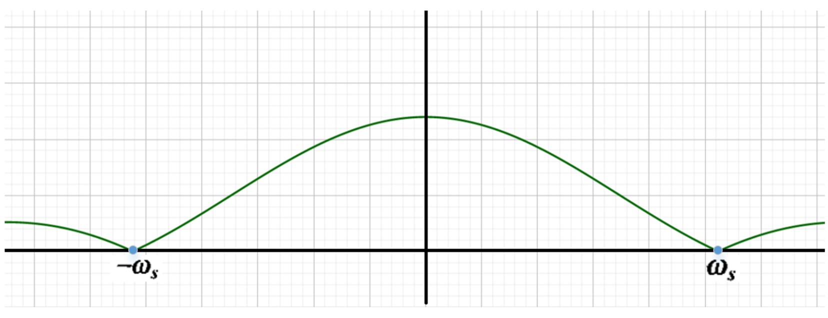
设 $\omega_c = \frac{\omega_s}{2}$，得到如下的重建结果：



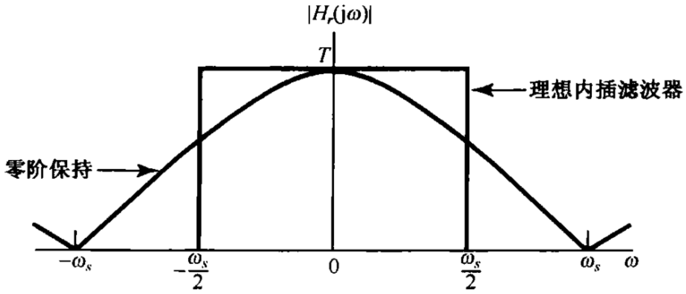
对于一个脉冲串信号，可以使用零阶保持滤波器和理想低通滤波器都可以进行内插。零阶保持滤波器在频域的模如下，可以看出是理想低通滤波器的近似：

$$H_0(j\omega) = e^{-j\omega\frac{T}{2}}\left[\frac{2\sin(\omega\frac{T}{2})}{\omega}\right] \tag{四.6}$$

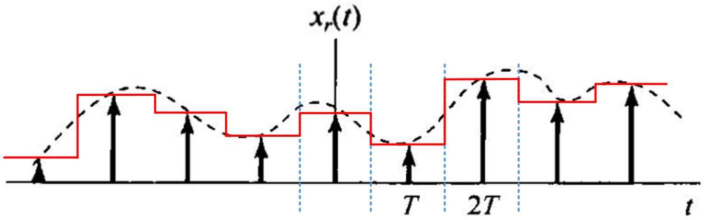
由上式可知，$|H_0|$ 其实就是 $sinc$ 函数取绝对值：



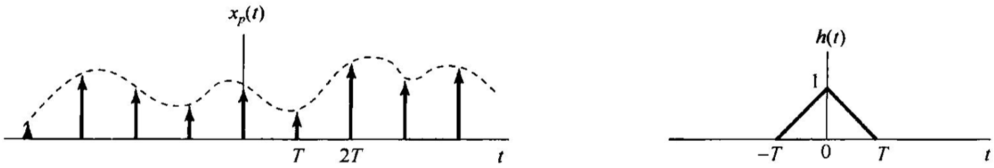
零阶保持器在频域上的效果与理想低通滤波器的对比如下：



零阶保持器其实就相当于采样冲激串与矩形冲激响应的卷积的结果，而如果这个矩形冲激响应在时域上表现为 $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ 上为 1，那么可以理解为“临近插值”（即靠近哪个采样点，函数就是什么值）：



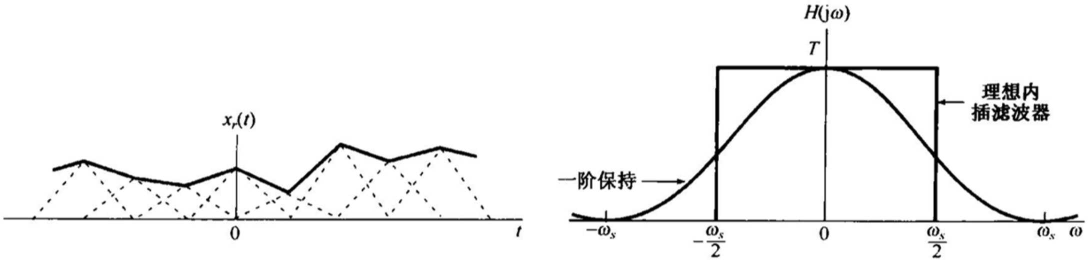
还有其他的内插方式，例如线性内插。线性内插则可以称为“一阶保持”，在时域上就是一个三角形：



频域表示为：

$$H(j\omega) = \frac{1}{T}\left[\frac{\sin(\frac{\omega}{2}T)}{\frac{\omega}{2}}\right]^2 \tag{四.7}$$

恢复以后的信号（其实就相当于采样冲激串与三角形冲激响应的卷积的结果）以及频谱模表示为：



五　混叠现象

如果采样率不够高，就会产生混叠现象。尽管这时再使用理想低通滤波器无法将原始信号重建出来，但是重建出来的信号 x_r 会满足一个性质，即在采样瞬时是相等的：

$$x_r(nT) = x(nT) \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{五.1}$$

我们依旧取 $\omega_c = \frac{\omega_s}{2}$，恢复以后的信号就是：

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\frac{\omega_c T}{\pi}\frac{\sin(\omega_c(t-nT))}{\omega_c(t-nT)} \tag{五.2}$$

$$\omega_c = \frac{2\pi}{T\cdot 2} = \frac{\pi}{T} \tag{五.3}$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\frac{\sin\left[\frac{\pi}{T}(t-nT)\right]}{\frac{\pi}{T}(t-nT)} \tag{五.4}$$

我们知道：

$$\frac{\sin\left[\frac{\pi}{T}(t-nT)\right]}{\frac{\pi}{T}(t-nT)}=\begin{cases}1, & t=nT\\ 0, & t\neq nT\end{cases} \tag{五.5}$$

也就是说：

$$x_r(nT)=x(nT) \tag{五.6}$$

六 总结

总之，采样定理的基本内容差不多就是这些了。本小册子的知识点大多来自于 [1]，但是对讲解的顺序和方式都进行了调整和修改，为保证内容的通俗性以及为了知识更容易理解。

有时候，我们也希望对离散系统进行采样，相比于连续时间系统，离散系统的采样和恢复又会有其他的性质和方法。关于这些内容我们会在数字信号处理的专栏进行细致的解释。

参考文献

[1] Signals and Systems Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, with S. Hamid Nawab. Prentice Hall, 2013.

[2] https://zhuanlan.zhihu.com/p/24334995