香农小波

Dezeming Family

2022 年 4 月 28 日

DezemingFamily 系列书和小册子因为是电子书，所以可以很方便地进行修改和重新发布。如果您获得了 DezemingFamily 的系列书，可以从我们的网站 [https://dezeming.top/] 找到最新版。对书的内容建议和出现的错误欢迎在网站留言。

目录

一　香农小波的引入

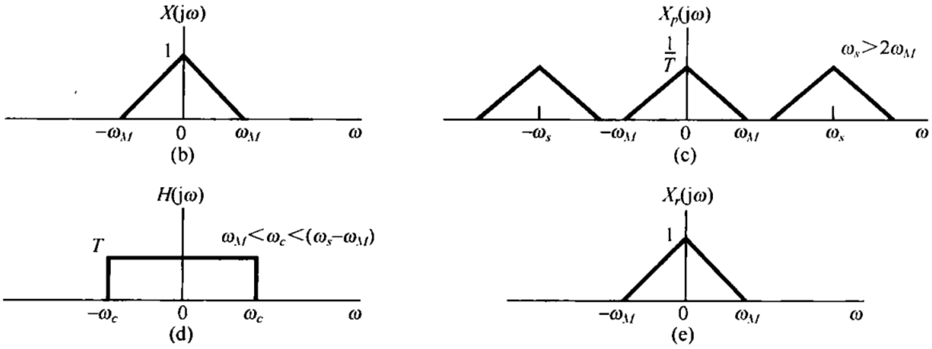
前面举例使用的 Haar 小波是 1909 由 Haar 提出的小波，而香农小波才是多分辨分析的产物——由 Meyer 构造出来。我们通过研究香农小波，可以更好地理解一般意义上的多分辨分析。

香农小波有很多种形式，我们研究的是一般的推导过程。

1 1　香农采样定理

香农采样定理又叫 Nyquist 采样定理（其实就是 Nyquist 发现的），具体解释可以参考 DezemingFamily 的《采样定理》，我们只解释一下结论。

设信号最高频率为 ω_M。假设采样周期为 T，则采样频率就是 $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$。设重建时低通滤波器 $H(\omega)$ 的大于 0 的区间是 $[-\omega_c, \omega_c]$：



重建信号 $x_r(t)$ 为：

$$
\begin{aligned}
x_r(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\frac{\omega_c T}{\pi}\left(\frac{\sin(\omega_c(t-nT))}{\omega_c(t-nT)}\right) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\frac{2\omega_c}{\omega_s}\left(\frac{\sin(\omega_c(t-nT))}{\omega_c(t-nT)}\right)
\end{aligned} \tag{一.1}
$$

一般我们会让 $\omega_c = \frac{\omega_s}{2}$，得到：

$$
\begin{aligned}
x_r(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\left(\frac{\sin(\omega_c(t-nT))}{\omega_c(t-nT)}\right) \\
\omega_c &> \omega_M
\end{aligned} \tag{一.2}
$$

1 2　定义 $\phi(t)$

通过上式，我想很多人都能看出一些端倪。我们令 $\omega_c = \pi$，采样间隔 T 可以写为：

$$
\begin{aligned}
&\omega_s = \frac{2\pi}{T} > 2\omega_M \\
&\omega_c \geq \omega_M \\
&\omega_c = \frac{1}{2}\omega_s = \frac{1}{2}\frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{T} \qquad (一.3) \\
&\omega_c = \pi \Longrightarrow T = 1 \qquad (一.4)
\end{aligned}
$$

进而得到：

$$
\begin{aligned}
x_r(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\left(\frac{\sin(\pi(t-n))}{\pi(t-n)}\right) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\phi(t-n) \\
\phi(t) &= \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}
\end{aligned} \tag{一.5}
$$

$\phi(t)$ 的整数平移是否构成标准正交系呢？首先证明其正交性：

$$\begin{aligned}\big\langle \phi(t-n), \phi(t-m)\big\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t-n)\overline{\phi(t-m)}dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\widehat{\phi}(\omega)e^{-in\omega}\right]\overline{\left[\widehat{\phi}(\omega)e^{-in\omega}\right]}d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\widehat{\phi}(\omega)\right|^2 e^{-i(n-m)\omega}d\omega \end{aligned} \tag{一.6}$$

由于 $\phi(t)$ 是 $sinc$ 函数，所以 $\widehat{\phi}(\omega)$ 是一个矩形函数，只在某一段（在 $(-\pi,\pi)$ 区间内）的值不为 0，因此：

$$\big\langle \phi(t-n), \phi(t-m)\big\rangle = \begin{cases}0, & n\neq m\\ 1, & n=m\end{cases} \tag{一.7}$$

现在，只要最大频率 ω_M 小于 π 的函数，都在 $\{\phi(t-kn)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 构成的函数空间（设为 $\mathcal{V}_0$）中。

1 3　定义 $\phi_{(j,k)}(t)$

令 $\omega_c = 2^j\pi$，则 $\mathcal{V}_j$ 构成线性子空间：

$$\mathcal{V}_j = \{f(t),\ if\ |\omega| > 2^j\pi \Rightarrow \widehat{f}(\omega)=0\} \tag{一.8}$$

$f(t)$ 可以这么表示：

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(2^{-j}n)\left(\frac{\sin(\pi(2^jt-n))}{\pi(2^jt-n)}\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2^{-\frac{j}{2}}f(2^{-j}n)2^{\frac{j}{2}}\phi(2^jt-n) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2^{-\frac{j}{2}}f(2^{-j}n)\phi_{(j,n)}(t) \end{aligned}$$

当 $j\to+\infty$ 时，$\mathcal{V}_j\to\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 空间，而此时：

$$\phi_{(j,0)}(t)\to\delta(t) \tag{一.9}$$

此时 $f(t)$ 可以写作：

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)*\delta(u-t)du \tag{一.10}$$

1 4　香农小波

用香农采样定义的 $\mathcal{V}_0$ 包含了所有频率带宽在 $(-\pi,\pi)$ 之间的信号；$\mathcal{V}_1$ 则包含了频率带宽在 $(-2\pi,2\pi)$ 之间的信号。因此我们可以定义 $\mathcal{W}_0$，即频率带宽在 $(-2\pi,\pi]\cup[\pi,2\pi)$。

香农尺度函数的扩张方程可以在频率对应关系中得到（我们不再赘述其形式），然后根据尺度扩张方程的系数 h_k 与小波扩张方程系数 g_k 之间的关系来得到小波扩张方程。

香农小波既可以是复数小波，也可以是实数小波。但是它并不是紧支撑的（注意，事实上带限信号在时域上一定是 $(-\infty,+\infty)$ 上都有值的 [1]）。

由于香农小波的证明和结论并不难，而且在有了多分辨分析的基础以后，理解起来会很容易，所以我们不再去做更深入地分析，现在香农小波的用途并没有那么广泛，主要是结合频率来理解多分辨分析。

二　多分辨分析总结

多分辨分析这个小专题我用了一周的业余时间完成。最近科研工作比较紧张，能够拿出这么多时间也确实不容易，基本上睡觉前和吃饭时也在构思写作顺序。期间，在参考不同的书之间，也对不同书中的描述方法和一些问题做了反复修订。这里最后再做一点总结。

2 1 空间分解与重构

$\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 空间可以拆分为不同的小波空间：

$$\mathcal{L}^2(\mathbb{R}) = \oplus_{j=-\infty}^{+\infty} \mathcal{W}_j \tag{二.1}$$

在平时使用软件做信号分析时（我会在讲完 Daubechies 小波以后专门做一个专题，关于 Python 小波分析），连续小波变换其实处理的也是离散信号，所以移动步长都需要我们自己设置。而连续小波变换的结果是不会很难逆变换恢复到原始信号的（不是说不能，而是处理起来比较麻烦，计算机处理的离散信号一般都是有限序列信号）。

软件中，一般连续小波变换都是人用来分析的，软件处理则是对信号做离散变换，逐级分解，分解完以后再逐级合并，恢复到原始信号。

2 2 我们已经了解过的小波

我们现在一共拥有了两种小波——Haar 小波和香农小波。

Haar 小波的优点在于简单，但是缺点是并非连续函数，有一些不好的特性，例如频率上，可以看到 Haar 尺度函数 $\phi(t)$ 和小波函数 $\psi(t)$ 有较大重叠区域，也就是频率分辨率差。

香农小波优点是连续函数，而且频率分辨率较好（小波函数 $\psi(t)$ 与尺度函数 $\phi(t)$ 的频率完全不重叠），但缺点是非紧支撑，因此工程上都是选择近似的区间。

一直到后来，I.Daubechies 提出了构造层级小波的方法，多分辨分析与小波构造理论基本完全确立——紧支撑的连续正交小波，也是我们的下一个专题。

我相信很多人都听说过小波中的 Mallat 快速算法的描述，即先卷积，再抽取（抽二采样）。我本想放在 Daubechies 小波之后再讲解 Mallat 快速算法，但好像很多时候我们都是直接使用快速算法，而不必了解小波的具体形式，因此，在介绍下一个专题之前，我们用一篇文章来介绍 Mallat 快速算法。

参考文献

[1] [https://baike.baidu.com/item/%E9%A6%99%E5%86%9C%E5%B0%8F%E6%B3%A2/22781985]