贝塞尔曲线

Dezeming Family

2022 年 3 月 10 日

DezemingFamily 系列书和小册子因为是电子书，所以可以很方便地进行修改和重新发布。如果您获得了 DezemingFamily 的系列书，可以从我们的网站 [https://dezeming.top/] 找到最新版。对书的内容建议和出现的错误欢迎在网站留言。

目录

一 幂基参数曲线 **1**

二 Bernstein 基函数 **1**

2 1 Bernstein 简介 1

2 2 Bernstein 基的基本性质 2

2 3 Bernstein 基的高级性质 2

三 分段贝塞尔曲线的连续性 **3**

四 贝塞尔插值 **4**

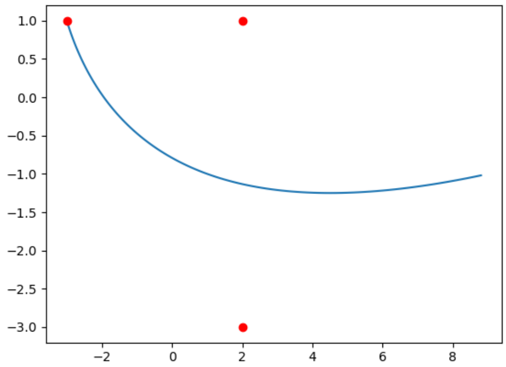
参考文献 **5**

一　幂基参数曲线

我们可以使用幂基来得到的基于幂基的参数曲线，比如某组幂基系数为：

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{一.1}$$

得到的曲线和三个参数构成点 $(2,1)$、$(2,-3)$ 以及 $(-3,1)$ 显示为：



但是三个控制点好像跟曲线看不出有什么关系。

我们希望有一组基，能够看出控制点和曲线之间的关系。贝塞尔 (Bezier) 借助 Bernstein 基函数构造出了具有非常好的性质的曲线表示形式。

在介绍贝塞尔曲线之前，我们需要强调，“B 样条” 的 B 其实是”Basis” 样条的缩写，并不是贝塞尔或者 Bernstein 的缩写。可以认为，B 样条是贝塞尔曲线的泛化版本。

二　Bernstein 基函数

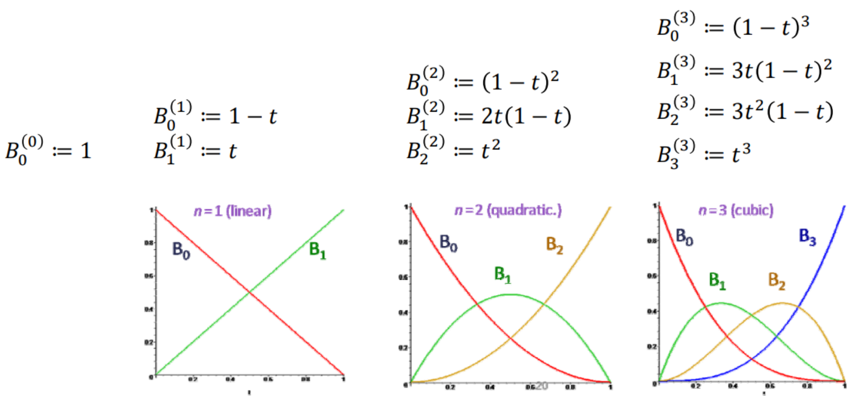
虽然据贝塞尔所说，他创造出贝塞尔基时并不知道这就是 Bernstein 基，但由于 Bernstein 具有很多很好的性质，我们还是先了解一下 Bernstein 基。

2 1　Bernstein 简介

n 次 Bernstein 基表示为：

$$B_i^n(t) = \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} t^i (1-t)^{n-i}$$
$$\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \quad i = 0, 1, 2, ..., n \tag{二.1}$$

0 次到 3 次的 Bernstein 基如图（图片来自 [1]），t 取值在 $[0,1]$ 之间：



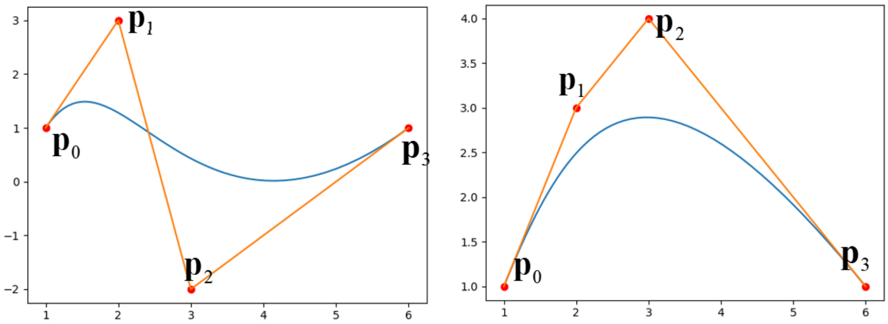
使用 Bernstein 基构造的曲线，可以描述为：

$$\mathbf{f}(t) = \sum_{i=1}^{n} b_i^n(t) \mathbf{p}_i \tag{二.2}$$

也就是对于 $n+1$ 个顶点，使用 n 次贝塞尔曲线。

比如三次贝塞尔曲线，就是：

$$\mathbf{f}(t) = b_0^3(t)\mathbf{p}_0 + b_1^3(t)\mathbf{p}_1 + b_2^3(t)\mathbf{p}_2 + b_3^3(t)\mathbf{p}_3 \tag{二.3}$$



对于更复杂的形状，可以用多段贝塞尔曲线来拼接得到，比如多段二次贝塞尔曲线。

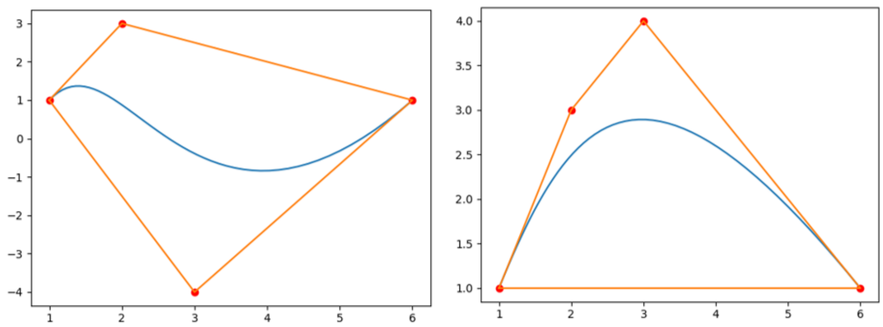
2 2 Bernstein 基的基本性质

（1）基 $B_i^n(t)$ 的最大值出现在 $t = \frac{i}{n}$ 处。比如 $B_0^n = (1-t)^n$ 的最大值在 $t = \frac{0}{n} = 0$ 处。

（2）权性：$\sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) = 1$，也就是任何 t 对应的基的值加起来都是 1。

（3）正性：所有基都是大于 0 的函数。

（4）凸包性：权性 + 正性可以构成凸包性。可以理解为，曲线上的每个值都是其他点线性组合得到的，而且组合的系数都是大于 0 小于 1 的，因此曲线在控制点的内部：



（5）基性：B^n 是次数不高于 n 的多项式空间的一组基。该基可以与幂基相互转换。

（6）端点插值性：贝塞尔曲线在端点处与 $\mathbf{p}_0$ 和 $\mathbf{p}_n$ 重合。虽然端点处的切线与边是重合的，但切线长度是边长的 n 倍, 这是因为 $f'(0) = n(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0)$。

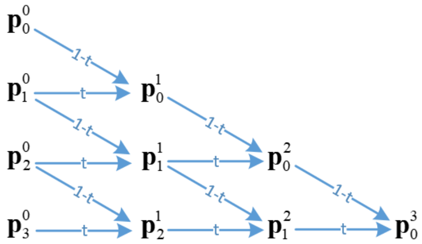
2 3 Bernstein 基的高级性质

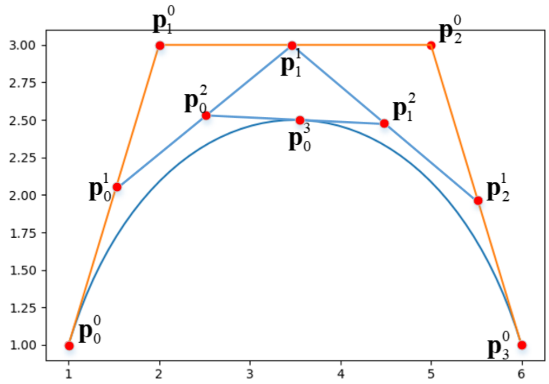
（1）升阶性：可以把 n 阶贝塞尔曲线转换为用 $n+1$ 阶曲线表示，表示出的贝赛尔曲线是一样的。这里暂时不介绍转换公式。我们一般来说希望能够降阶，用更少的控制点去描述一条曲线。

（2）递推性：n 阶基可以由两个 $n-1$ 阶的相邻的基组合得到，递推式可以这么构造高阶函数

$$\begin{aligned} B_i^n(t) &= (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i+1}^{n-1}(t) \\ B_0^0(t) &= 1 \end{aligned} \tag{二.4}$$

递推式可以得到 De Casteljau 算法，该算法对于由 $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, ..., \mathbf{p}_n$ 控制的贝塞尔曲线 $\mathbf{x}(t)$，设 $n = 3$，$t = 0.5$：



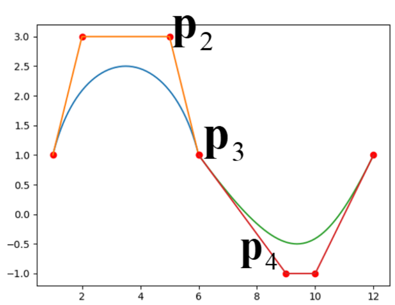


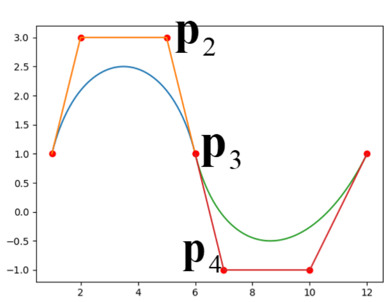
为了好表示，这里的初始控制点写为 $\mathbf{p}_0^0$、$\mathbf{p}_1^0$、$\mathbf{p}_2^0$ 和 $\mathbf{p}_3^0$。从上图可知，可以用递归的方法得到的 $\mathbf{p}_0^3$ 就是我们相求的 $x(t)$。

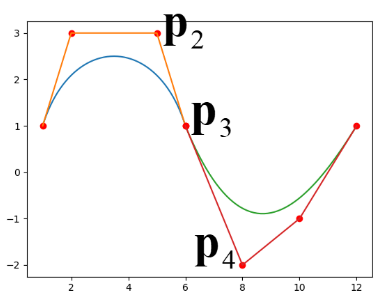
$\mathbf{p}_0^3$ 将这个曲线分为了两部分，一部分是由 $\mathbf{p}_0^0-\mathbf{p}_0^1-\mathbf{p}_0^2-\mathbf{p}_0^3$ 控制的，另一部分是由 $\mathbf{p}_0^3-\mathbf{p}_1^2-\mathbf{p}_2^1-\mathbf{p}_3^0$ 控制的。这种方法可以将贝塞 0 尔曲线 $x(t)$ 离散化为一系列的线段（比原控制点构成的线段更贴近 $x(t)$ 的线段）。

三　分段贝塞尔曲线的连续性

对于很多点，我们希望能够分成多段贝塞尔曲线。







我们前面说过（端点插值性），端点处的切线，以上图中曲线为例，每张图都是由两段曲线构成。第一段曲线的 $\mathbf{p}_3$ 点切线恰好就是 $3\times(\mathbf{p}_3-\mathbf{p}_2)$；第二段曲线的 $\mathbf{p}_3$ 点切线恰好就是 $3\times(\mathbf{p}_3-\mathbf{p}_4)$.

对于 C^1 连续，其实就是 $\mathbf{p}_2$ 和 $\mathbf{p}_3$、$\mathbf{p}_4$ 共线，且满足 $|\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_3|=|\mathbf{p}_3-\mathbf{p}_4|$（如上图左）。而 G^1 连续则只需要考虑三点共线（如上图右），即有公共切线。

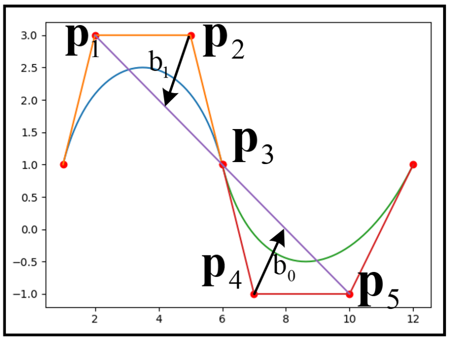
对 $\mathbf{x}(t)$ 求两次导数，假设某一段贝塞尔曲线，端点分别是 $\mathbf{p}_0$ 和 $\mathbf{p}_n$，得到：

$$
\begin{aligned}
&x(0)=\mathbf{p}_0 \quad x(1)=\mathbf{p}_1\\
&\frac{d^2\mathbf{x}(0)}{dt^2}=2n(n-1)(\frac{\mathbf{p}_0+\mathbf{p}_2}{2}-\mathbf{p}_1)\\
&\frac{d^2\mathbf{x}(1)}{dt^2}=2n(n-1)(\frac{\mathbf{p}_{n-2}+\mathbf{p}_n}{2}-\mathbf{p}_{n-1})
\end{aligned}
\tag{三.1}
$$

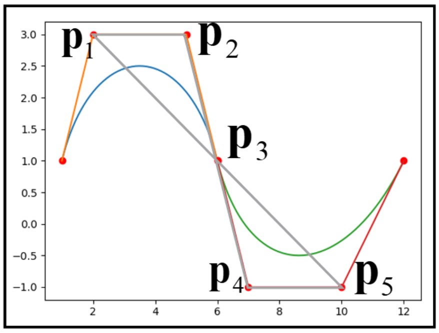
为了表示在图上方便，我们设：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{d}_0&=(\frac{\mathbf{p}_0+\mathbf{p}_2}{2}-\mathbf{p}_1)\\
\mathbf{d}_1&=(\frac{\mathbf{p}_{n-2}+\mathbf{p}_n}{2}-\mathbf{p}_{n-1})
\end{aligned}
\tag{三.2}
$$

C^2 连续，则要求下图中的第一段曲线的 $\mathbf{d}_1$ 等于第二段曲线的 $\mathbf{d}_0$：



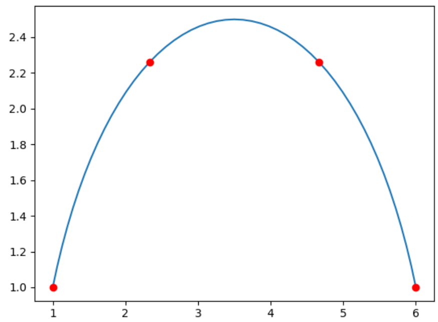
因此 C^2 连续也可以等价为下图中的两个灰色三角形全等 [1]：



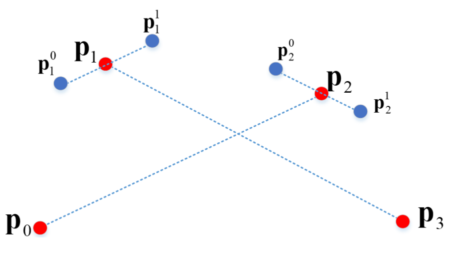
G^2 连续需要关于曲线的性质问题（曲率等），这里暂不介绍。

四　贝塞尔插值

假如我们有几个控制点，我们希望能够构造一个贝塞尔曲线，使得该曲线能够插值这些控制点：

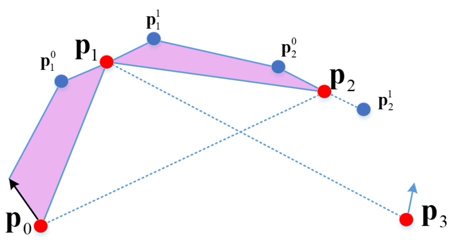


我们描述的方法来自 [1]。为了插值 $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$，首先先生成平行线：

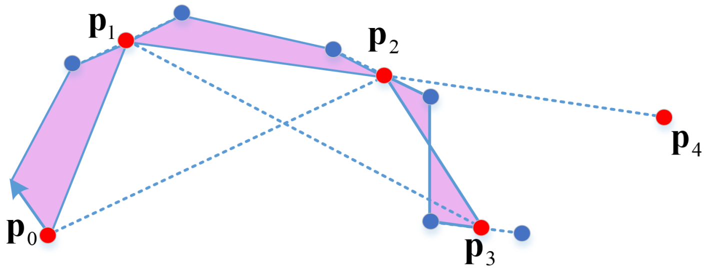


这里构造的平行线 $\mathbf{p}_1^0-\mathbf{p}_1^1$ 与 $\mathbf{p}_0-\mathbf{p}_2$ 平行，且 $|\mathbf{p}_1^0-\mathbf{p}_1|=|\mathbf{p}_1^1-\mathbf{p}_1|=\frac{1}{6}|\mathbf{p}_0-\mathbf{p}_2|$，之所以要这么设置，并非什么数值上的原因，只是为了让我们构造出来的曲线更好看一些罢了，避免构造出很扭曲的插值曲线。

对于 $\mathbf{p}_0$ 点上的切线，理论上是可以随便取的。这样我们构造出的曲线就是 C^1 连续的曲线了：



如果有更多的插值点也是同理：



但是它要满足 C^2 连续性是很难的，因为 C^2 具有一定的全局连续性。

参考文献

[1] [https://www.bilibili.com/video/BV1NA411E7Yr?p=5]

[2] [https://blog.csdn.net/mw_1422102031/article/details/107489924]