Mallat 快速小波算法

Dezeming Family

2022 年 5 月 30 日

DezemingFamily 系列书和小册子因为是电子书，所以可以很方便地进行修改和重新发布。如果您获得了 DezemingFamily 的系列书，可以从我们的网站 [https://dezeming.top/] 找到最新版。对书的内容建议和出现的错误欢迎在网站留言。

目录

一 知识回顾 **1**

1 1 尺度方程回顾 1

1 2 投影与重构 1

二 快速算法的一些解释 **2**

参考文献 **3**

一　知识回顾

本文主要参考了 [1]，但该书中，$\mathcal{V}_j \supset \mathcal{V}_{j+1}$，与现在主流的小波分解的描述是相反的，所以本文进行了大量的修正（费老大劲了）。

很多文章都不介绍小波分解和 Mallat 快速算法之间的概念问题，而是有时候直接用一个滤波器和下采样操作来介绍。其实，我们前面已经介绍的信号分解和重构算法已经就是 Mallat 算法了，只是我们暂时还没有给出它的一遍表示方式。

1 1　尺度方程回顾

我们首先回顾一下尺度方程：

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \sqrt{2}\sum_n h[n]\phi(2t-n) = \sum_n h[n]\phi_{(1,n)}(t) \\ \psi(t) &= \sqrt{2}\sum_n g[n]\phi(2t-n) = \sum_n g[n]\phi_{(1,n)}(t)\end{aligned} \tag{一.1}$$

将尺度方程对时间进行伸缩和平移，即令 $t = 2^j t - k$，可以得到：

$$\begin{aligned}\phi(2^j t-k) &= \sqrt{2}\sum_n h[n]\phi(2(2^j t-k)-n) = \sqrt{2}\sum_n h[n]\phi(2^{j+1}t-2k-n) \\ \psi(2^j t-k) &= \sqrt{2}\sum_n g[n]\phi(2(2^j t-k)-n) = \sqrt{2}\sum_n g[n]\phi(2^{j+1}t-2k-n)\end{aligned} \tag{一.2}$$

令 $m = 2k+n$：

$$\begin{aligned}\phi(2^j t-k) &= \sqrt{2}\sum_m h[m-2k]\phi(2^{j+1}t-m) \\ \psi(2^j t-k) &= \sqrt{2}\sum_m g[m-2k]\phi(2^{j+1}t-m)\end{aligned} \tag{一.3}$$

需要注意，$2^{(j+1)/2}\phi(2^{j+1}t-m)$，$m \in \mathbb{Z}$ 是 $\mathcal{V}_{j+1}$ 空间的一组单位正交基。也就是说，对于 $\mathcal{V}_{j+1}$ 空间内的信号而言：

$$f_{j+1}(t) = \sum_k c_{j+1,k}2^{(j+1)/2}\phi(2^{j+1}t-k) \tag{一.4}$$

1 2　投影与重构

将 $\mathcal{V}_{j+1}$ 空间的信号分解一次，投影到 $\mathcal{V}_j$ 和 $\mathcal{W}_j$ 空间：

$$f_j(t) = \sum_k c_{j,k}2^{j/2}\phi(2^j t-k) + \sum_k d_{j,k}2^{j/2}\psi(2^j t-k) \tag{一.5}$$

$$\begin{aligned}c_{j,k} &= \langle f_{j+1}(t), \phi_{j,k}(t)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{j+1}(t)2^{j/2}\phi^*(2^j t-k)dt \\ d_{j,k} &= \langle f_{j+1}(t), \psi_{j,k}(t)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{j+1}(t)2^{j/2}\psi^*(2^j t-k)dt\end{aligned}$$

把一.3式代入到 $c_{j,k}$ 和 $d_{j,k}$ 中的求解式中，可以得到：

$$\begin{aligned}c_{j,k} &= \sum_m h[m-2k]\int_{-\infty}^{+\infty} f_{j+1}(t)2^{(j+1)/2}\phi^*(2^{j+1}t-m) \\ d_{j,k} &= \sum_m g[m-2k]\int_{-\infty}^{+\infty} f_{j+1}(t)2^{(j+1)/2}\phi^*(2^{j+1}t-m)\end{aligned}$$

注意：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{j+1}(t)2^{(j+1)/2}\phi^*(2^{j+1}t-m) = c_{j+1,m}$$

所以可以得到：

$$c_{j,k} = \sum_m h[m-2k] \cdot c_{j+1,m}$$
$$d_{j,k} = \sum_m g[m-2k] \cdot c_{j+1,m}$$

通过类似的推导，得到重构公式：

$$c_{j+1,m} = \sum_k c_{j,k} h[m-2k] + \sum_k d_{j,k} g[m-2k] \tag{一.6}$$

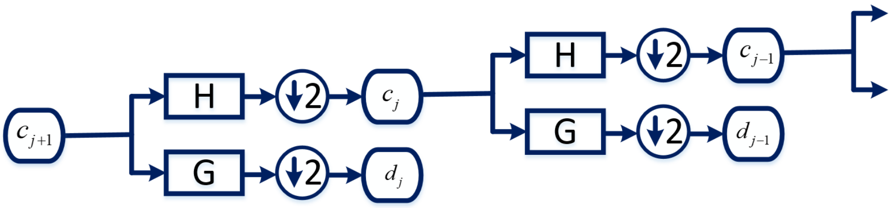
二　快速算法的一些解释

本质来说，我们前面的知识回顾内容已经算是快速算法了，但为了后面引出多孔算法，这里会更详细地描述一下快速算法，以及在编程时如何实现。

在程序中，信号都是离散的，离散信号如何进行快速分解？本节主要描述的过程就是滤波 + 下采样操作。

H 和 **G** 两个滤波器分别具有高通特性和低通特性。一个长度为 n 的、$\mathcal{V}_{j+1}$ 空间内的信号经过一次分解以后，就变为了两个长度为 $n/2$ 的、$\mathcal{V}_j$ 空间内的信号。

在很多书中，这个过程都是这么写的：

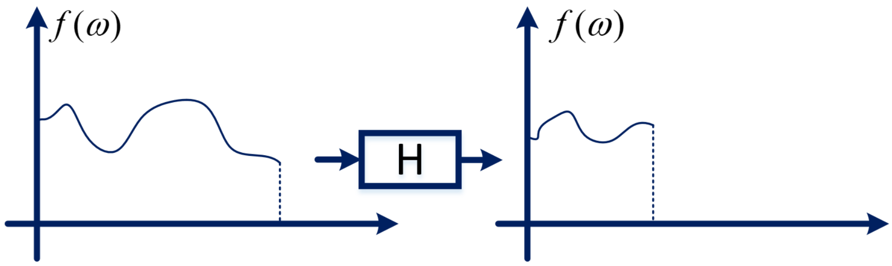


这里包含了一个下采样操作。可能有些人会问，我们分解以后的信号长度不是已经减半了吗？其实这里的滤波和下采样在前面的介绍中是合为一体的，前面的公式已经包含了滤波和下采样过程。

现在从信号采样的层面上分析一下：原始信号经过低通滤波器以后，频带范围减小到了以前的一半，因此，信号被下采样也不会损失任何信息，所以相当于信号中已经有一部分可以被舍弃了。在这个公式中：

$$c_{j,k} = \sum_m h[m-2k] \cdot c_{j+1,m}$$

如果转换到频域做卷积，那么卷积得到的结果（其实就是频域相乘），对于有值的范围为 n 的信号，其实频域卷积以后再逆变换得到的结果中，信号长度仍然为 n，但是频谱只剩一半了：



在离散信号中，频谱有值的范围等同于信号有值的范围，我们不再需要频谱中为 0 的那部分，所以相当于通过了低通滤波器后的信号进行了下采样。

我们对 Mallat 算法的表示有两种，一种是通过定义来得到一个矩阵（比如这里采用的是 D6 尺度滤波器）：

$$\begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5 \\ h_4 & h_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \\ h_2 & h_3 & h_4 & h_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_0 & h_1 \end{bmatrix} \tag{二.1}$$

这里面已经包含了下采样的过程（每行移位 2 个元素）。

另一种描述方式，就是用原信号与 $h[k]$ 做卷积，然后再下采样，得到分解后的尺度信号。

参考文献

[1] 潘泉张磊孟晋丽. 小波滤波方法及应用 (附光盘)[M]. 清华大学出版社, 2006.

[2] 张奉军, 周燕, 曹建国. MALLAT 算法快速实现方法及其应用研究 [J]. 自动化与仪器仪表, 2004(6):3.