体渲染预积分分类

Dezeming Family

2022 年 5 月 10 日

DezemingFamily 系列书和小册子因为是电子书，所以可以很方便地进行修改和重新发布。如果您获得了 DezemingFamily 的系列书，可以从我们的网站 [https://dezeming.top/] 找到最新版。对书的内容建议和出现的错误欢迎在网站留言。

目录

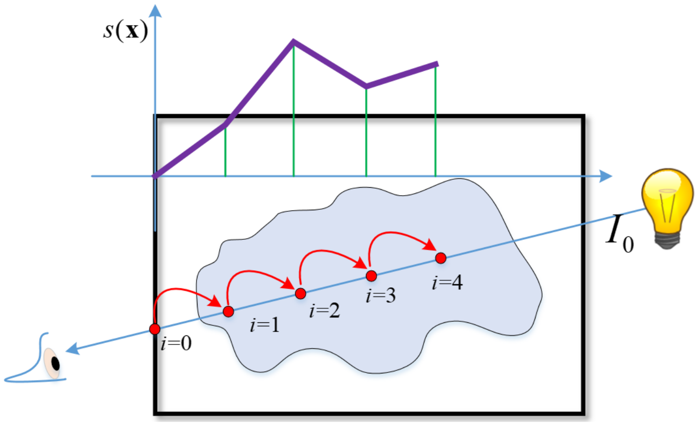
一　预积分分类的引入

在基于吸收发射方程的体渲染积分路径中，很容易因为传输函数而引入高频信息。设体空间的点为 $\mathbf{x}$，传输函数分别将其映射为颜色 $q(s(\mathbf{x}))$ 和 $\kappa(s(\mathbf{x}))$。

我们应用预积分分类的思想，把数值积分分为两部分积分：一部分是在连续的标量场 $s(\mathbf{x})$ 上做积分，另一部分是对 $q(s)$ 和 $\kappa(s)$ 做积分，来避免由于奈奎斯特频率引起的问题。

二　方法描述

第一步是在采样光线中采样连续标量场 $s(\mathbf{x})$，此时采样的奈奎斯特频率并不会被传输函数所影响。采样值构成了一段分段线性标量函数：



使用传输函数，不透明度就可以近似为：

$$\alpha_i = 1 - \exp\Big(-\int_{id}^{(i+1)d} \kappa\big(s(\mathbf{x})\big)d\mathbf{x}\Big)$$
$$\approx 1 - \exp\Big(-\int_0^1 d \times \kappa\big((1-l)s_i + l \cdot s_{i+1}\big)dl\Big) \tag{二.1}$$

颜色 (关联颜色 q) 近似为：

$$c_i \approx d \times \int_0^1 \Big(q\big((1-l)s_i + l \cdot s_{i+1}\big) \times \exp\Big(-\int_0^l \kappa\big((1-l')s_i + l' \cdot s_{i+1}dl'\big)\Big)\Big)dl \tag{二.2}$$

使用非关联颜色 q' 可以转换为：

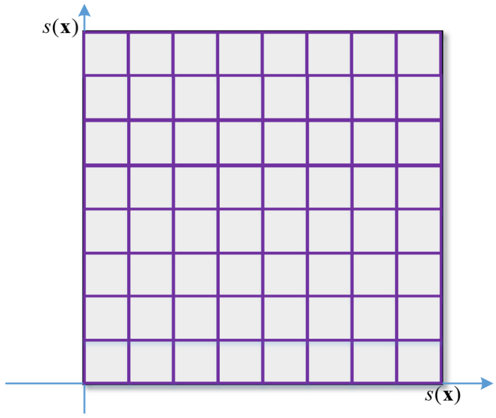
$$c_i \approx d \times \int_0^1 \Big(\kappa\big((1-l)s_i + l \cdot s_{i+1}\big)q'\big((1-l)s_i + l \cdot s_{i+1}\big) \times \exp\Big(-\int_0^l \kappa\big((1-l')s_i + l' \cdot s_{i+1}dl'\big)\Big)\Big)dl \tag{二.3}$$

也就是说，c_i 计算的结果永远是关联颜色的结果。

于是，预积分分类就是计算：

$$I \approx \sum_{i=0}^{n}\Big(c_i \prod_{j=0}^{i-1}(1-\alpha_j)\Big) \tag{二.4}$$

我们可以看到，c_i 和 α_i 的计算只会与 s_i 和 s_{i+1} 有关，因此我们可以提前计算出来一张表（或者两张表，一张存储颜色的积分，一张存储不透明度的积分）：



这个表的横纵轴都是 $s(\mathbf{x})$，我们设分别是 s_a 和 s_b，里面的值存储的是不透明度和颜色值从 s_a 到 s_b 的积分。当采样到某段 s_i 和 s_{i+1} 时，就可以以 s_i 为横坐标，s_{i+1} 为纵坐标，从该表中查找积分值。可以想象地到，当传输函数变化时，这张表一般是需要重新制作的（或者里面相应的部分需要重新制作）。

如果 s_i 和 s_{i+1} 的坐标并不在表上恰好对应，则通过插值的方法得到。

三　实际的计算方式

在采样中，我们会得到采样路段中每段的两个端点，假设为 s_i 和 s_{i+1}。我们本节来研究如何预计算表。

α_i 的计算一般是：

$$\begin{aligned}\alpha_i &\approx 1-\exp\Big(-\int_0^1 d\times\kappa\big((1-l)s_i+l\cdot s_{i+1}\big)dl\Big)\\ &=1-\exp\Big(-\frac{d}{s_{i+1}-s_i}\int_{s_i}^{s_{i+1}}\kappa(s)ds\Big)\end{aligned} \tag{三.1}$$

对于 α，和《吸收发射方程和编程描述》中一样，需要忽略本段自吸收的部分，因此：

$$\begin{aligned}c_i &\approx d\times\int_0^1\Big(q\big((1-l)s_i+l\cdot s_{i+1}\big)\Big)dl\\ &=\frac{d}{s_{i+1}-s_i}\int_{s_i}^{s_{i+1}}q(s)ds\end{aligned} \tag{三.2}$$

注意，虽然不一定 $s_{i+1}>s_i$，但 $\frac{d}{s_{i+1}-s_i}$ 与积分值相乘的结果都是大于 0 的。

参考文献

[1] Engel K, Hadwiger M, Kniss J M, et al. Real-time volume graphics[M]//ACM Siggraph 2004 Course Notes. 2004: 29-es.