

信号的初次投影

Dezeming Family

2022 年 5 月 13 日

DezemingFamily 系列书和小册子因为是电子书，所以可以很方便地进行修改和重新发布。如果您获得了 DezemingFamily 的系列书，可以从我们的网站 [<https://dezeming.top/>] 找到最新版。对书的内容建议和出现的错误欢迎在网站留言。

目录

一 离散信号与 Haar 小波分析	1
二 离散信号与 Daubechies 小波分析	1
参考文献	1

一 离散信号与 Haar 小波分析

如何把离散信号投影到 Haar 尺度函数的 \mathcal{V}_0 空间中去？我们看到 \mathcal{V}_0 空间其实就是由 $[0, 1]$ 区间为 1 其他地方为 0 的函数整数位移来张成的，这跟离散信号仿佛不谋而合——直接让离散信号的原始信号值作为其在 \mathcal{V}_0 空间投影的系数不就可以了吗？

这样做不但方便实用，而且很容易去理解。我们小波变换后进行处理，处理完以后再逆变换，得到的 \mathcal{V}_0 空间的系数恰好就是响应的离散信号值。

于是，我们似乎就默认了这么一件事：离散信号的值就是在 \mathcal{V}_0 空间投影的系数。可是，当我们涉及到 Daubechies 小波时，情况好像就变了——Daubechies 尺度函数在 \mathcal{V}_0 空间时，其母函数并不是一个在 $[0, 1]$ 区间为 1 的函数，而是一个很复杂的、无法显式表示的函数，所以没有办法再这么理所当然地过渡过去了。

二 离散信号与 Daubechies 小波分析

可不可以将离散信号的值当做信号在 Daubechies 尺度函数空间 \mathcal{V}_0 上的投影呢？当然是可以的，尽管感觉起来有点怪，但好像没有什么太大问题。其实现在很多时候在做离散小波分解都是采用的这种方式，直接把离散值当成 \mathcal{V}_0 上的系数。

也有其他方法，比如假定存在一个原始信号 $f(t)$ ，经过投影计算直接投影到了 \mathcal{V}_0 空间。 $f(t)$ 可以通过很多方法获取，例如香农插值公式，例如样条插值公式等； \mathcal{V}_0 空间的 Daubechies 基也很容易得到（这里的容易指的是我们已经知道了怎么去获得，其实实际自己编程实现的时候也是一个挑战），所以我们就能计算出信号 $f(t)$ 在 \mathcal{V}_0 空间的投影系数，然后再进行小波分析。

这个小专题本来其实展开讲可以讲不少内容，但其实基本方法我们早就介绍得很详细了，所以这里不再赘述，我们一般做小波分析都是使用现有的数值专家写好的库函数，因此基本思想掌握了以后就可以进行应用了。

下一个专题，我们会利用 Python 来进行小波分析，但是我们只先介绍一维信号的离散小波和连续小波分析，等讲完二维小波分析专题后，再介绍图像的小波分析。

参考文献

- [1] Ruch D K , Fleet P V . Wavelet Theory: An Elementary Approach with Application[M]. John Wiley & Sons, 2009.
- [2] 小波分析与应用哈工大大理学院课程冉启文