初识 Daubechies 小波

Dezeming Family

2022 年 5 月 8 日

DezemingFamily 系列书和小册子因为是电子书，所以可以很方便地进行修改和重新发布。如果您获得了 DezemingFamily 的系列书，可以从我们的网站 [https://dezeming.top/] 找到最新版。对书的内容建议和出现的错误欢迎在网站留言。

目录

一　引子

Daubechies 小波是多分辨分析的集大成者，也是我们通常使用最广泛的小波。但是一般的数学书介绍得过为复杂难懂，对于数学应用者来说很不友好。本文将那些复杂的概念剥离，只介绍最核心的部分，让读者能够轻松地快速掌握 Daubechies 小波分析。为了后面描述简洁，我们把 Daubechies 小波简写为 DB 小波。

1 1　一些前提

Haar 小波并不是连续的，我们希望小波保持一定的连续性，而小波的连续性与尺度函数的连续性有一定的关系。

所谓连续性，比如在某处 C^0 连续表示在该处左右极限一致；C^1 连续表示在该点左右的导数也一致（可导）。

Daubechies 发现，如果要保证 $\phi(t) \in C^{N-1}(\mathbb{R})$，则 $H(\omega)$ 需要满足一定的关系：

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k e^{-ik\omega} = \left(\frac{1+e^{-i\omega}}{2}\right)^N S(\omega) \tag{一.1}$$

$$S(\omega) = \sum_{k=0}^{A} a_k e^{-ik\omega} \tag{一.2}$$

同时，我们需要注意多分辨分析需要满足:

$$|H(\omega)|^2 + |H(\omega+\pi)|^2 = 1 \quad all\ \omega \in \mathbb{R} \tag{一.3}$$

1 2　附加条件

注意我们在《多分辨分析的频域分析》提到过，如果 $\phi(t)$ 是紧支撑的，并且能够生成多分辨分析，则如果：

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=0}^{N} h_k e^{-ik\omega} \tag{一.4}$$

那么 $\phi(t)$ 的支撑就是 $[0, N]$。因此，对于式子一.2，A 小则说明尺度滤波器 $\mathbf{h}$ 很短，因此离散小波变换的速度也会更快。

当：

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=0}^{N} h_k e^{-ik\omega}, \quad N < +\infty \tag{一.5}$$

我们把 N 叫做 $H(\omega)$ 的度 (degree)。

我们再补充一条理论。当用 $H(z), z = e^{-i\omega}$ 来表示时，若：

$$|H(z)|^2 + |H(-z)|^2 = 1 \tag{一.6}$$

则 $H(z)$ 一定包含一个因子 $1+z$（证明也很简单）。

假设 $H(\omega)$ 的度有限，$H(0) = 1$，且 $H(z) = \left(\frac{1+z}{2}\right)^N S(z)$，其中：

$$\max_{|z|=1} |S(z)| \le 2^{N-1} \tag{一.7}$$

则 $H(\omega)$ 对应的尺度函数 $\phi(t)$ 可以构成一个多分辨分析。这也是一个限制条件，要求 A 尽可能小一些。

二　构建 $S(\omega)$

2 1　寻找 $S(\omega)$ 的基本方法

我们往下推导一下：

$$
\begin{aligned}
&|H(\omega)|^2 + |H(\omega+\pi)|^2 = 1 \quad all\ \omega \in \mathbb{R} \\
&\left|\left(\frac{1+e^{-i\omega}}{2}\right)^N S(\omega)\right|^2 + \left|\left(\frac{1+e^{-i(\omega+\pi)}}{2}\right)^N S(\omega+\pi)\right|^2 \qquad (二.1)\\
&\Longrightarrow \left(\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)^N \left|S(\omega)\right|^2 + \left(\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)^N \left|S(\omega+\pi)\right|^2 = 1 \qquad (二.2)
\end{aligned}
$$

设 $L(\omega) = \left|S(\omega)\right|^2$，有以下一些性质：

$$L(\omega) = \left|S(\omega)\right|^2 = S(\omega)\overline{S(\omega)} = S(\omega)S(-\omega) \qquad (二.3)$$

$$L(\omega) = L(-\omega) \qquad (二.4)$$

由于 $L(\omega)$ 是一个复指数多项式，而且是偶函数，所以它可以写为一系列 $\cos(j\omega)$ 的和的形式：

$$L(\omega) = c_0 + 2\sum_{j=1}^{A} c_j \cos(j\omega) \qquad (二.5)$$

再考虑一些性质，即对于某个三角函数 $\cos(k\omega)$，它可以写为 $\cos(\omega)$ 的多项式形式，例如 $\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$，这个多项式最高次项为 k 次项。于是上式可以写为：

$$L(\omega) = \sum_{k=0}^{A} d_k \cos^k(\omega) = \sum_{k=0}^{A} d_k \big(1 - 2\sin^2(\frac{\omega}{2})\big)^k \qquad (二.6)$$

令 $y = \sin^2(\frac{\omega}{2})$，则 $y \in [0,1]$，多项式写为：

$$P(y) = \sum_{k=0}^{A} d_k (1-2y)^k \qquad (二.7)$$

之后，我们根据一些关系：

$$
\begin{aligned}
&\cos^2(\frac{\omega}{2}) = 1 - \sin^2(\frac{\omega}{2}) \\
&\cos(\omega+\pi) = 1 - y
\end{aligned}
$$

就能得到：

$$(1-y)^N P(y) + y^N P(1-y) = 1 \qquad (二.8)$$

找出一个多项式 $P(y)$ 相对来说比较直接，而找到 $P(y)$ 以后，就可以反推得到 $\left|S(\omega)\right|^2$ 了，之后根据 spectral factorization 操作（我们会在后面作简单介绍）来得到 $S(\omega)$，并最终在给定的 N 下得到 $H(\omega)$。

2 2　寻找 $P(y)$ 的基本方法

在数论中，有一个性质，如果两个数 a 和 b 没有非平凡公因子（即除以 1 以外的公因子），则会存在特定的整数 p 和 q，满足 $a \cdot p + b \cdot q = 1$。例如 $10 \times 19 + 63 \times (-3) = 1$ [1]。

对于多项式也有类似的性质，如果两个多项式 $P(y)$ 和 $Q(y)$ 级数为 $N-1$，并且满足：

$$(1-y)^N \cdot P(y) + y^N \cdot Q(y) = 1 \qquad (二.9)$$

多项式 $P(y)$ 和 $Q(y)$ 就可以表示为：

$$
\begin{aligned}
&P(y) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{2N-1}{k} y^k (1-y)^{N-1-k} \\
&Q(y) = P(1-y)
\end{aligned}
$$

特例，当 $N=2$ 时，$P(y)=1+2y$，当 $N=3$ 时，$P(y)=1+3y+6y^2$。

注意我们需要保证 $P(y)$ 的值是非负的，注意 $y=\sin^2(\frac{\omega}{2})\in[0,1]$，而只要 $y\in[0,1]$，则 $P(y)$ 就一定是非负的（这需要证明，但并不难）。

由于 $L(\omega)=P(y)$，且 $y=\sin^2(\frac{\omega}{2})=\frac{1-\cos\omega}{2}$，所以：

$$L(\omega)=\sum_{k=0}^{N-1}\binom{2N-1}{k}\left(\frac{1-\cos\omega}{2}\right)^k\left(\frac{1+\cos\omega}{2}\right)^{N-1-k} \tag{二.10}$$

2 3 Spectral Factorization

该操作将 $L(\omega)=|S(\omega)|^2$ 变为 $S(\omega)$，具体过程颇为繁琐，所以不再细讲，这里只是为了整个流程的完整性，所以最后提一句。

注意 $L(\omega)=S(\omega)S(-\omega)$，经过一定的数学转化，最终可以得到 $S(\omega)$ 的求解式。得到的 $S(\omega)$ 可以写为：

$$S(\omega)=\sum_{k=0}^{N-1}a_k e^{-ik\omega} \tag{二.11}$$

最终得到这种形式的 $H(\omega)$：

$$\begin{aligned}H(\omega)&=\left(\frac{1+e^{-i\omega}}{2}\right)^N S(\omega)\\&=\left(\frac{1+e^{-i\omega}}{2}\right)^N\sum_{k=0}^{N-1}a_k e^{-ik\omega}\end{aligned} \tag{二.12}$$

大家如果不太明白为什么后面是 $N-1$ 次幂也没有什么关系，这是在一定的推导中得到的（首先定义 N，然后得到 $P(N)$，最后求解出 $S(\omega)$，系数就是 $N-1$）。最后 $H(\omega)$ 就可以写为：

$$H(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=0}^{2N-1}h_k e^{-ik\omega} \tag{二.13}$$

这个结果并不是完全唯一的。事实上，在应用中一般会把系数反转（反转以后仍然满足之前的条件），这样就可以写为：

$$\begin{aligned}H^*(\omega)&=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=0}^{2N-1}h_{2N-1-k}e^{-ik\omega}\\H^*(\omega)&=e^{-(2N-1)i\omega}\overline{H(\omega)}\end{aligned} \tag{二.14}$$

$H(\omega)$ 的系数从 0 到 $2N-1$，一共有 $2N$ 个，即对应的 Daubechies 尺度滤波器的长度是 $2N$。

三　例子

当 $N=1$ 时，$H(e^{-i\omega})=\frac{1+e^{-i\omega}}{2}$，就是 Haar 小波。

对于六级 (six-tap)DB 小波，设 $N=3$，得到 $P(y)=1+3y+6y^2$。经过一系列操作，得到：

$$\begin{aligned}H(\omega)&=(\frac{1+e^{-i\omega}}{2})^3F(e^{-i\omega})\\&=0.0249086-0.0604169e^{-i\omega}-0.095467e^{-2i\omega}\\&\quad+0.325186e^{-3i\omega}+0.570563e^{-4i\omega}+0.235235e^{-5i\omega}\end{aligned} \tag{三.1}$$

滤波器系数还要乘以 $\sqrt{2}$，最终得到六个尺度系数 h_k。此时的滤波器系数叫做”four-tap” DA scaling filter。

之后，再根据 $g_k=(-1)^k h_{1-k}$ 就能得到小波滤波器 $\mathbf{g}$ 的系数。我们给出 $D4$ 到 $D10$ 的全部小波滤波器系数和尺度滤波器系数：

Coiflet filter g_k, h_k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
h_4	0.4829629131445	0.836516303	0.22414386	-0.129409522						
g_4	-0.129409522551	-0.22414386	0.83651630	-0.482962913						
h_6	0.3326705529500	0.80689150	0.45987750	-0.135011020	-0.08544127	0.03522629				
g_6	0.0352262918857	0.08544127	-0.13501102	-0.459877502	0.806891509	-0.33267055				
h_8	0.2303778133088	0.71484657	0.63088076	-0.027983769	-0.187034811	0.030841381	0.032883011	-0.0105974017		
g_8	-0.0105974017850	-0.03288301	0.03084138	0.1870348117	-0.027983769	-0.630880767	0.714846570	-0.2303778133		
h_{10}	0.1601023979741	0.60382926	0.72430852	0.1384281459	-0.242294887	-0.032244869	0.077571493	-0.0062414902	-0.012580751	0.003335725
g_{10}	0.0033357252854	0.012580751	-0.0062414	-0.077571493	-0.032244869	0.2422948870	0.138428145	-0.7243085284	0.6038292697	-0.16010239

注意一般在 matlab 或者 python 上 DB 则是另一种解释，即定义 tap 为 A，即 $A=2$ 时，$DB2$ 为 $D4$ 小波；$A=3$ 时，$DB3$ 为 $D6$ 小波。我们一定要注意这种写法。我们可能会在 wiki 上看到这样的 DB 小波系数：

Scaling Coefficient p_k	db1 (Haar)	db2	db3	db4	db5
p_0	1	0.6830127	0.47046721	0.32580343	0.22641898
p_1	1	1.1830127	1.14111692	1.01094572	0.85394354
p_2		0.3169873	0.650365	0.8922014	1.02432694
p_3		-0.1830127	-0.19093442	-0.03957503	0.19576696
p_4			-0.12083221	-0.26450717	-0.34265671
p_5			0.0498175	0.0436163	-0.04560113
p_6				0.0465036	0.10970265
p_7				-0.01498699	-0.00882680
p_8					-0.01779187
p_9					4.71742793e-3

它的系数正好跟尺度滤波器系数相差 $\sqrt{2}$ 倍。例如 DB1，也就是 Haar 小波，尺度滤波器系数是 $[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}]$，而尺度系数就是 $[1,1]$。这一点我们回忆尺度方程和小波方程：

$$\phi(t)=\sum_n h_n\sqrt{2}\phi(2t-n)$$
$$\psi(t)=\sum_n g_n\sqrt{2}\phi(2t-n)$$

即尺度系数为 $\sqrt{2}h_k$。

现在，我们已经知道了 DB 小波滤波器怎么构造了，但是我们却忽视了一个很重要的问题：DB 小波长什么样子？怎么得到 DB 小波的母函数呢？我们下一篇文章再进行介绍。

参考文献

[1] Ruch D K , Fleet P V . Wavelet Theory: An Elementary Approach with Application[M]. John Wiley & Sons, 2009.

[2] https://zh.m.wikipedia.org/zh/多贝西小波