

图像去噪与滤波基础概览

Dezeming Family

2022 年 5 月 25 日

DezemingFamily 系列文章和电子书全部都有免费公开的电子版，可以很方便地进行修改和重新发布。如果您获得了 DezemingFamily 的系列电子书，可以从我们的网站 [<https://dezeming.top/>] 找到最新的版本。对文章的内容建议和出现的错误也欢迎在网站留言。

目录

一 本文介绍	1
二 线性空间滤波基础	1
2.1 相关与卷积	1
2.2 图像平滑模糊	1
三 非线性空间滤波基础	1
3.1 统计排序滤波	1
3.2 模糊集合论滤波算法	2
四 频率域滤波	2
4.1 频率域滤波基础	2
4.2 去除周期噪声	2
五 其他空间滤波方法	3
5.1 几何均值滤波	3
5.2 谐波均值滤波	3
5.3 逆谐波均值滤波	3
六 自适应滤波	3
6.1 自适应均值滤波	4
6.2 自适应中值滤波器	4
七 图像退化假设与逆滤波	5
7.1 图像退化假设	5
7.2 逆滤波方法与扩展	5
八 小波与多分辨率分析滤波	5
参考文献	5

一 本文介绍

本文的内容重点在于对图像去噪的各个方面都进行简单的阐述和分析，使得对图像去噪方向有更好的把握。但由于图像去噪领域的内容非常庞大，所以很难在一篇文章中讲述清楚，本文只会涉及最基本的去噪和滤波技术，对于复杂的理论本文并不会进行很深的讲解，而是会放到其他文章中。更复杂和有效的滤波技术，尤其是近些年来论文里出现的去噪技术，将会在后续文章中总结介绍。

二 线性空间滤波基础

2.1 相关与卷积

“卷积 (Convolution)”在一维系统的计算中相当于“反转求和”，而“相关 (Correlation)”则不需要反转 [1]:

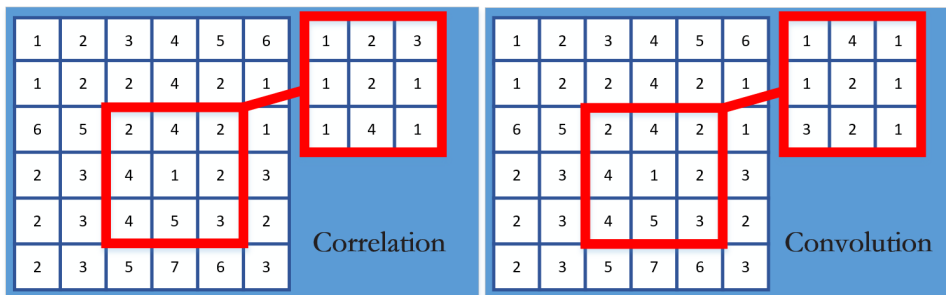
$$\text{Convolution} : y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)s(t - \tau)d\tau$$

$$\text{Convolution} : y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n - k]$$

$$\text{Correlation} : y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)s(\tau - t)d\tau$$

$$\text{Correlation} : y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]s[k - n]$$

在二维图像中，反转就相当于把卷积核旋转 180 度：



我们一般把图像的高斯模糊称为高斯卷积，而没有刻意说明需要翻转卷积核，这是因为高斯核翻转 90 度或 180 度是保持不变的。

2.2 图像平滑模糊

把邻域 $a \times b$ 大小的区域进行平滑模糊，即输出图像像素 $g(x, y)$ 为：

$$g(x, y) = \frac{\sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t)f(x + s, y + t)}{\sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t)} \quad (二.1)$$

常用的权重 w ，比如均值权重（所有权重 w 都是 1）、高斯权重，通过这种去噪（滤波）方式会使得图像变得模糊，所以通常会加入一些其他参考信息，比如后面我们会介绍的双边滤波或引导滤波。

三 非线性空间滤波基础

3.1 统计排序滤波

中值滤波可以有效地处理椒盐噪声 (salt-and-pepper noise)。椒盐噪声（本质是脉冲噪声 (impulse noise)）相当于在原图上加了一些零散的黑白点，在处理这种噪声时，这些噪声会被过滤掉，并不会由于

卷积而扩散到其他像素中。

对于 3×3 的邻域，中值就是第 5 个最大的值；对于 5×5 的邻域，中值就是第 13 个最大的值。

中点滤波器则是找出邻域最大值和最小值，然后取最大最小值的中间值。中点滤波器对于随机分布噪声的去噪效果很好，尤其是对于高斯噪声或者均匀噪声。

3.2 模糊集合论滤波算法

在集合论中，一个元素可能属于集合 A，也可能同时属于另一个集合 B，但不能“百分之 30 倾向于属于集合 A，百分之 70 倾向于属于集合 B”。后一种，叫做模糊集。对于一个元素 m ，它隶属于集合 A 的程度为 $\mu_A(m)$ ，其中，如果 $\mu_A(m)$ 趋近于 1，说明属于集合 A 的程度越高， $\mu_A(m) = 1$ 则表明 m 完全属于集合 A，为 0 则表明完全不属于集合 A。

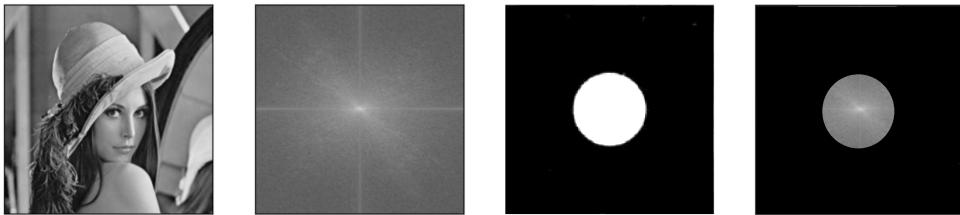
模糊集合论还会涉及交集、并集等一般集合的概念，这里暂不介绍。根据模糊集原理，计算邻近像素与当前像素的差，根据差就可以较好地判断当前像素是否是边缘区域。当有了边缘，就可以进行边缘增强以及保边滤波。

四 频率域滤波

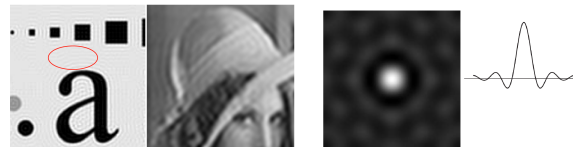
4.1 频率域滤波基础

先将图像进行傅里叶变换，然后再用滤波器在频域上使用滤波器进行卷积，卷积完以后再变换回空间域。频域图一般会进行中心化（即高频在四周，低频在中心）。

这个滤波器可以相当于把频域图只保留中间一个圆内部的值，其他值归 0，这是最简单的情况，又叫做理想低通滤波器 (ILPF)，下图分别是原图、中心化后的频谱图、滤波器图、滤波器卷积以后的频谱图：



理想滤波器滤波的结果会出现这种“振铃 (ring)”效应（右边两幅图）：

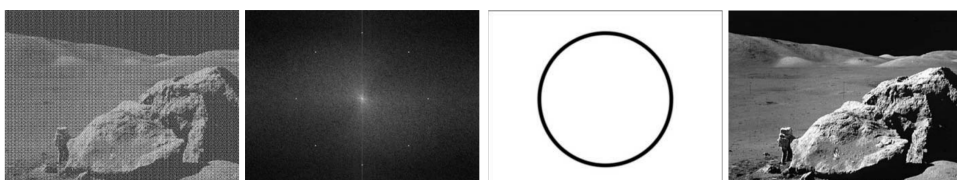


这是由于理想滤波器在空间域中是 sinc 函数的形状（上图左边两幅图），中心波瓣是造成模糊的原因，外侧的波瓣是造成振铃的原因。当理想滤波器频域上的圆的半径越大，则空间域上就越趋近于一个单位冲激函数，因此振铃效应就会变小（极端情况，相当于原图像直接跟单位冲激函数卷积，就会得到原图）。

为了减少振铃只得到模糊的效果，可以根据数字信号处理中的滤波器设计方式来设计滤波器，比如巴特沃斯低通滤波器 (Butterworth lowpass filter (BLPF))、高斯低通滤波器 (Gaussian lowpass filters (GLPFs)) 等。

4.2 去除周期噪声

有时候，图像被引入了某种噪声，如下图第一张，我们在空间域可能看不出是什么形式的噪声，比如正弦噪声。但是变换到频域以后，可以很清楚地看出一些状况，如下图第二张：



因此可以用一个带阻滤波器进行滤波，如上图的三和四。

对于不同形式的周期噪声，在频域中表示都不同，但都很容易进行区分和滤波。

五 其他空间滤波方法

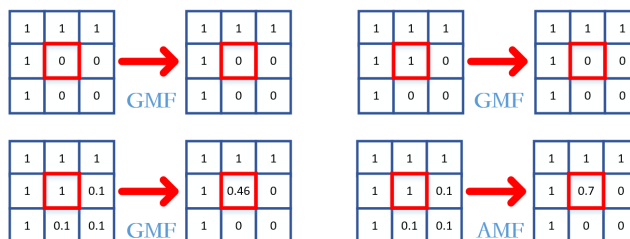
空间去噪方法的基本要求是能量守恒，即整幅图像去噪后的能量等于去噪前的能量。比如对于算术平均滤波，就要把邻域像素相加以后再除以邻域像素个数来得到当前像素值，除以邻域像素个数就是为了保证能量守恒。

5.1 几何均值滤波

除了算术均值滤波 (Arithmetic mean filter(AMF), 直接邻域像素取平均作为当前像素值), 还有几何均值滤波 (geometric mean filter(GMF)), 其中, $S_{x,y}$ 表示 (x,y) 像素的邻域, $i(x,y)$ 是输入图像像素, $o(x,y)$ 是输出图像像素, m 和 n 是邻域的长和宽:

$$o(x,y) = \left[\prod_{s,t \in S_{x,y}} i(s,t) \right]^{\frac{1}{mn}} \quad (五.1)$$

这种方式丢失的图像细节更少, 比如如果有的区域是一个边缘, 且当前像素值极低, 那么滤波后该值仍然极低, 但是如果当前像素值较高, 则滤波后会明显拉低。所以这种滤波方式对暗像素特征比较友好:



5.2 谐波均值滤波

谐波均值滤波 (harmonic mean filtering) 擅长处理椒盐噪声中的盐粒噪声 (也就是比较高的值的噪声), 但是不擅长处理椒盐噪声中的胡椒噪声 (噪声中比较低的值), 它擅长处理高斯噪声。

$$o(x,y) = \frac{mn}{\sum_{s,t \in S_{x,y}} \frac{1}{i(s,t)}} \quad (五.2)$$

5.3 逆谐波均值滤波

逆谐波均值滤波 (contraharmonic mean filter) 表示如下:

$$o(x,y) = \frac{\sum_{s,t \in S_{x,y}} i(s,t)^{Q+1}}{\sum_{s,t \in S_{x,y}} i(s,t)^Q} \quad (五.3)$$

虽然逆谐波滤波器不能直接去除椒盐噪声, 但当 Q 为正值, 可以消除胡椒噪声; 当 Q 为负值, 可以消除盐粒噪声。注意 $Q = -1$ 时为谐波均值滤波器, 而 $Q = 0$ 时则为算术均值滤波器。

六 自适应滤波

自适应滤波的方法有很多种, 事实上现在的滤波器很多都会有自适应的成分。如何自适应, 其实就是对邻域的像素分析其特性, 根据特性来生成滤波器的一些系数。它不像算术平均滤波器这种无论邻域像素表现如何都是相加取平均, 而是有一定的适应性。我们只介绍 [1] 中的两个最基础的方案, 其他更先进的自适应方法将会留在以后介绍。

6.1 自适应均值滤波

本小节介绍 Adaptive, local noise reduction filter。

在一个区域内，均值用于度量平均灰度，而方差用于度量对比度。我们希望当污染图像的噪声在某个区域方差为 0 时（说明该区域没有被噪声污染，或者只是亮度整体发生了变化），则不对该区域进行去噪。如果局部方差很高，且与噪声方差高度相关，说明这是边缘区域，该区域要被尽量保留。如果噪声方差等于像素局部方差，则返回邻域像素的算数平均值。

我们可以感受到，在这种方法中，我们要把全局噪声方差来估计局部噪声方差。设 $m_{x,y}$ 是像素局部均值， σ_n^2 是噪声方差， σ_L^2 是邻域像素方差，则滤波器可以写为：

$$o(x,y) = i(x,y) - \frac{\sigma_n^2}{\sigma_L^2} [i(x,y) - m_{x,y}] \quad (六.1)$$

为了保证输出不为负数，则需要令 $\frac{\sigma_n^2}{\sigma_L^2} < 1$ 。

这里，噪声的方差需要我们提前知道或者估计出来。

6.2 自适应中值滤波器

Adaptive median filter，它可以处理脉冲噪声，且可以平滑非脉冲噪声时尽量保留细节。

它的过程可以写为两个进程，其中 z 表示灰度，下标 med 表示中值，下标 max 和 min 分别表示最大值和最小值：

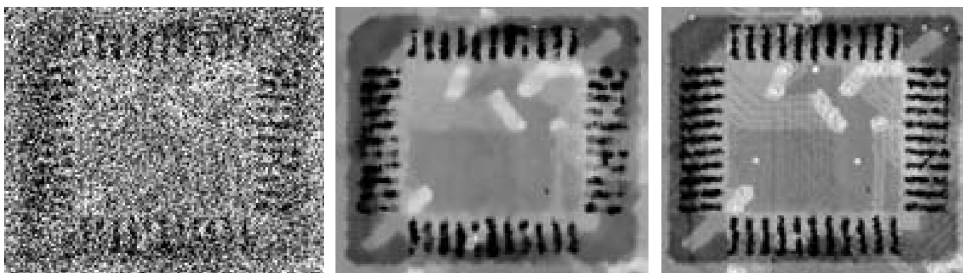
进程 A:

- $A_1 = z_{med} - z_{min}$
- $A_2 = z_{med} - z_{max}$
- 如果 $A_1 > 0$ 且 $A_2 < 0$ ，转到进程 B
- 否则，增大窗口尺寸，只要窗口尺寸小于提前设定的值，就一直重复进程 A；尺寸大于设定值，就输出中值。

进程 B:

- $B_1 = z_{x,y} - z_{min}$
- $B_2 = z_{x,y} - z_{max}$
- 如果 $B_1 > 0$ 且 $B_2 < 0$ ，输出 $z_{x,y}$ ，否则输出 z_{med}

对于椒盐噪声，进程 A 可以判断中值 z_{med} 其是否是脉冲，如果是则扩大局部窗口尺寸；而进程 B 可以判断中心点是否是脉冲，如果不是，则输出原像素值，而不是继续使用中值，这样可以避免失真。下图中，从左到右分别是带噪声图、中值滤波结果和自适应中值滤波结果。



七 图像退化假设与逆滤波

7.1 图像退化假设

退化建模是解决一些特定场景去噪的有效手段，我们会根据先验知识，来假设当前图像是退化的图像，例如在大雾天气中，被大雾遮挡的街道场景；或者由于大气湍流得到的不清晰的卫星照片；还有，比如人在运动中得到的模糊图像。当这些退化图像又存在一定噪声时，则会为去噪带来更多的挑战。

7.2 逆滤波方法与扩展

首先，我们需要对图像退化进行建模，得到退化函数。逆滤波就是对退化函数取反来进行恢复的过程。

当图像退化并加入了一些噪声后，有些方法可以综合退化函数与噪声的统计特征进行滤波，比如维纳滤波（最小均方误差滤波 (minimum mean square error filter)），其实它的发明是为了解决战争中火力控制系统的精确跟踪问题。维纳滤波在语音处理领域非常常见，应用到图像领域后，它的基本思想是估计出一个未被污染的图像 \hat{f} ，使得其与原始未被污染的图像 f 之间的均方误差最小，这种估计会被转换到频域中度量。

类似的，还有最小乘方滤波算法 (constrained least squares filter)。维纳滤波在平均意义上具有最优结果，而约束最小二乘方滤波算法在任意图像都能产生最优结果。维纳滤波器经过推广，可以得到几何均值滤波 (geometric mean filter)。

这些方法的理论性较强，详细推导的论文我暂时还没有研读过，所以这里仅仅只是进行简单的介绍。

八 小波与多分辨率分析滤波

小波分析之所以会蓬勃发展，很大程度上是在图像压缩和去噪上的应用，换句话说，小波的发展来自于图像和信号分析。

小波图像滤波有很多种方法，比如空间域相关滤波、小波阈值滤波等。最朴素的思想就是，将小波分解到不同的空间，然后在不同的空间执行滤波，然后将滤波的结果进行合并。

更详细的解释可以参考书籍 [3] 和论文 [2]。

参考文献

- [1] 冈萨雷斯. 数字图像处理. 第 3 版 [M]. 人民邮电出版社, 2015.
- [2] 潘泉, 孟晋丽, 张磊, 等. 小波滤波方法及应用 [J]. 电子与信息学报, 2007, 29(1):7.
- [3] 潘泉张磊孟晋丽. 小波滤波方法及应用 (附光盘)[M]. 清华大学出版社, 2006.