构造 Daubechies 小波母函数

Dezeming Family

2022 年 5 月 11 日

DezemingFamily 系列书和小册子因为是电子书，所以可以很方便地进行修改和重新发布。如果您获得了 DezemingFamily 的系列书，可以从我们的网站 [https://dezeming.top/] 找到最新版。对书的内容建议和出现的错误欢迎在网站留言。

目录

一　级联方法简介

我们已经知道如何得到尺度滤波器，但是我们还没有尺度函数。为此，Ingrid Daubechies 和 Jeffrey Laganas 提出了级联算法 (cascade algorithm)。这种方法类似于微积分中的牛顿法或者欧拉方法，首先提出一个 $\phi_0(t)$，然后通过一个方程来进行迭代，迭代到 $\phi_n(t)$，近似 $\phi(t)$。作为应用数学方面，我们可以暂时先不考虑该算法的正确性和收敛性。

考虑扩张方程 (dilation equation)：

$$\phi_{n+1}(t) = \sqrt{2}\sum_{k=0}^{M} h_k \phi_n(2t-k) \tag{一.1}$$

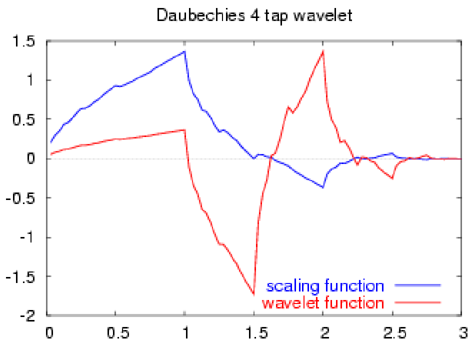
我们就从 Haar 小波的 $\phi_{Haar}(t)$ 开始进行迭代，则根据 Ingrid Daubechies 所述，迭代的最终目标会收敛于 $\phi(t)$。

二　以 D4 小波为例

首先，回忆 Haar 尺度函数为：

$$\phi_{Haar}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,1) \\ 0, & otherwise \end{cases} \tag{二.1}$$

我们先从网上找到 D4 小波的图，这样就能看到我们近似的结果在一步步逼近近乎收敛的结果（注意蓝色是尺度函数）：

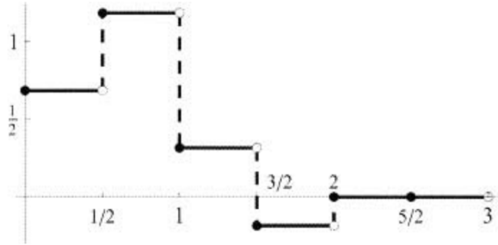


然后进行第一次迭代：

$$h_k: \quad 0.4829629131445 \quad 0.836516303 \quad 0.22414386 \quad -0.129409522$$

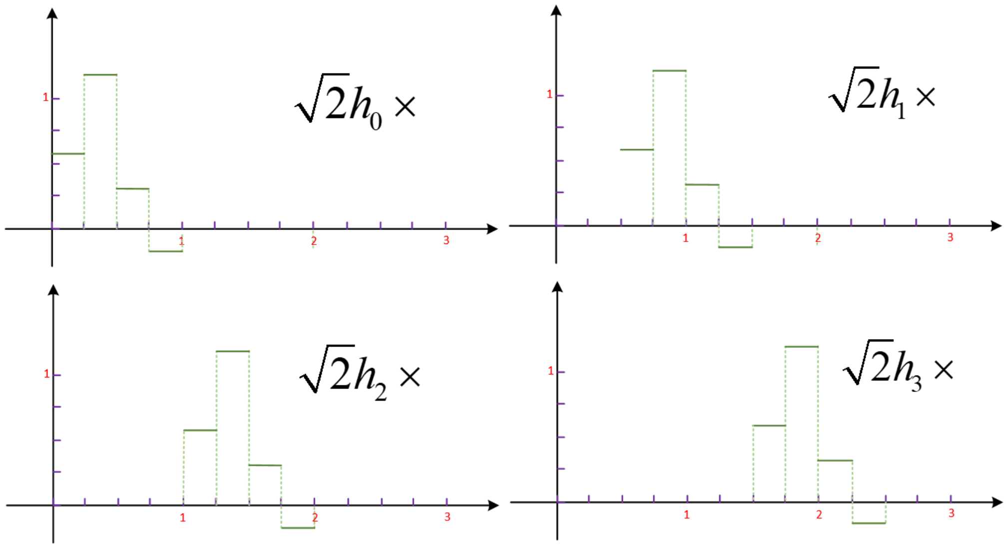
$$\phi_{n+1}(t) = \sqrt{2}\sum_{k=0}^{3} h_k \phi_n(2t-k) \tag{二.2}$$

因此，在 $[0, 0.5)$ 之间，$\phi_1(t)$ 为 $\sqrt{2} \times 0.4829629131445$。
在 $[0.5, 1.0)$ 之间，$\phi_1(t)$ 为 $\sqrt{2} \times 0.836516303$。
在 $[1.0, 1.5)$ 之间，$\phi_1(t)$ 为 $\sqrt{2} \times 0.22414386$。
在 $[1.5, 2.0)$ 之间，$\phi_1(t)$ 为 $\sqrt{2} \times -0.129409522$。
图示为（此时，$\phi_1(t)$ 的非零区间为 $[0, 2)$）：



(a) $\phi_1(t)$

再进行第二次迭代，就是下面四个函数的和（此时，$\phi_2(t)$ 的非零区间为 $[0, 2.5)$）：



经过一系列遍历以后，$\phi_2(t)$ 的紧支撑区间为 $[0,3]$。

三　一些结论

3 1　尺度函数的支撑

对于 Daubechies 尺度函数来说，设该 Daubechies 尺度函数为 DN 尺度函数，则支撑区间就是：

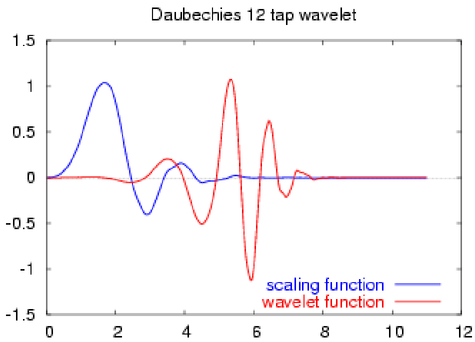
$$\overline{supp(\phi)} = [0, N-1] \tag{三.1}$$

就像 D4 尺度函数，支撑区间是 $[0,3]$。不过，由于 DN 中的 N 一般都是偶数，所以有时候用 D2N 来表示，此时支撑区间为 $[0, 2N-1]$。

关于支撑区间可以严格证明出来，但我们只是简单理解一下就好了。

3 2　一个很常见而且好看的小波

我们最常见的小波是 D12 小波，图示为：



这种小波很能体现出小波的震荡性，由此被经常用来作为小波的示意图。

3 3　小波函数的支撑空间

我们还是从 D4 出发：

$$\phi_{n+1}(t) = \sqrt{2}\sum_{k=0}^{3} h_k \phi_n(2t-k) \tag{三.2}$$

$$\psi_{n+1}(t) = \sqrt{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} g_k \phi_n(2t-k) \tag{三.3}$$

由于 $g_k = (-1)^k h_{1-k}$：h_0 有值，因此 g_1 有值；h_1 有值，因此 g_0 有值；h_2 有值，因此 g_{-1} 有值；h_3 有值，因此 g_{-2} 有值。所以小波扩张函数可以写为：

$$\psi_{n+1}(t) = \sqrt{2}\sum_{k=-2}^{1} g_k \phi_n(2t-k) \tag{三.4}$$

我们来看 $\psi(t)$：

$$\psi(t) = \sqrt{2}\sum_{k=-2}^{1} g_k \phi(2t-k) \tag{三.5}$$

由于 $\phi(t)$ 的支撑区间是 $[0,3]$，所以压缩一倍以后 $\phi(2t)$ 支撑区间为 $[0,1.5]$。$\phi(2t-1)$ 的支撑区间是 $[0.5,2.0]$，$\phi(2t+2)$ 的支撑区间为 $[-1,0.5]$，也就是说，$\psi(t)$ 的支撑区间是 $[-1,2]$.

我们把结论进行一般化，即对于尺度函数 D2N 小波，其尺度函数支撑区间为 $[0,2N-1]$，小波函数的支撑区间为 $[1-N,N]$。证明也不难，由于 $g_k = (-1)^k h_{1-k}$，所以当 h_k 有值的系数为 $h_0, h_1, ..., h_{2N-1}$，则 g_k 有值的系数为 $g_{-2N+2}, g_{-2N+3}, ..., g_1$，即 $\psi(t)$ 是由下面的这些函数组合成的：

$$\phi(2t-(-2N+2)), \phi(2t-(-2N+3)), ..., \phi(2t+1), \phi(2t), \phi(2t-1)$$

由于 $\phi(2t)$ 的支撑区间是 $[0,N-0.5]$，那么这些函数的支撑区间分别为：

$$[1-N,0.5],[1.5-N,1],...,[-0.5,N-1],[0,N-0.5],[0.5,N] \tag{三.6}$$

四　连续函数投影

函数投影这里不多说，因为主要还是依赖于近似。$\phi(t)$ 并不能直接表示成函数的形式，所以求积分只能依赖于梯形法则 (trapezoidal rule) 这种分段求和的方法。

$$f_j(t) = P_{f,j}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{j,k}\phi_{j,k}(t)$$
$$a_{j,k} = \langle f(t), \phi_{j,k}(t)\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)\phi_{j,k}(t)dt$$

现在我们就应该打破前面在学习 Haar 小波时的观念。Haar 小波虽然也是定义在连续空间 $\mathbb{R}$ 上的小波，但由于它 Haar 小波呈现阶梯状，所以完全可以理解为离散的两个值（比如对相邻的两个像素求差值）。在接下来的离散 Daubechies 小波变换里，其实我们默认 V_0 空间的信号就是最初的信号（也就是原本的离散信号），而我们会将 V_0 空间的信号分解到 V_{-1} 和 W_{-1} 空间，然后再继续分解下去。而现实中的连续函数一般都是定义在 $V_{+\infty}$ 上的。

当我们已经有 V_{j+1} 空间的信号，投影到 V_j 和 W_j 空间就很容易了（回忆之前的矩阵相乘，我们只需要找到这么一个矩阵即可）。

参考文献

[1] Ruch D K , Fleet P V . Wavelet Theory: An Elementary Approach with Application[M]. John Wiley & Sons, 2009.

[2] https://zh.m.wikipedia.org/zh/多贝西小波