# 海森（Hessian）矩阵

Dezeming Family

2021 年 7 月 13 日

DezemingFamily 系列书和小册子因为是电子书，所以可以很方便地进行修改和重新发布。如果您获得了 DezemingFamily 的系列书，可以从我们的网站 [https://dezeming.top/] 找到最新版。对书的内容建议和出现的错误欢迎在网站留言。

20210703：完成第一版。

## 目录



## 一 认识海森矩阵

对于可导的向量函数（多元函数）$f$ 而言，海森矩阵定义为：

$$H_{i,j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \tag{一.1}$$

我们在《多元函数（及向量函数）的泰勒展开》中介绍过，将 $f$ 进行泰勒展开，就能得到：

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x_0}) + \nabla f(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0})^T \cdot H \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}) + O\big((\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0})^3\big) \tag{一.2}$$

因为二阶连续可导的函数，$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$，因此海森矩阵 $H_{i,j} = H_{j,i}$，这是一个对称矩阵。

## 二 海森矩阵在图像中的应用

对于可导函数，当一阶导数为 0，二阶导数不为 0 时，说明是极值点。二阶导数大于 0，是极小值点；二阶导数小于 0，是极大值点。

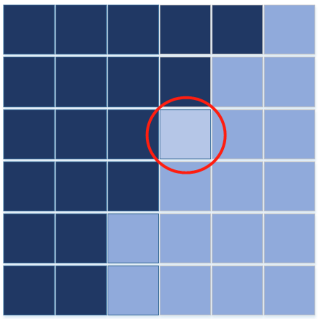
一般图像函数（二维函数）的泰勒展开写为：

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \begin{bmatrix} f'_x & f'_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta x & \Delta y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f'_{xx} & f'_{xy} \\ f'_{yx} & f'_{yy} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \tag{二.1}$$

海森矩阵既然相当于二阶导数，就可以进行一些判断。

### 消除边缘响应

我们可以根据图像像素值来判断当前极值点是极大值点还是极小值点，但有些时候也不够准确，比如如下情况：



红圈选中的像素在这个局部区域中本身应该是边缘信息，但因为该值小于周边值，所以就被当成极值信息了，这个时候就需要进行边缘检测。

我们看上面的二维图像泰勒展开公式。首先，在极值点附近，一阶导数为 0，因此上式可以写为：

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + +\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\Delta x & \Delta y\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f'_{xx} & f'_{xy} \\ f'_{yx} & f'_{yy}\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\Delta x \\ \Delta y\end{bmatrix} \tag{二.2}$$

因为 $f(x_0,y_0)$ 是一个常数，所以可以写为：

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = \Delta f \approx +\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\Delta x & \Delta y\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f'_{xx} & f'_{xy} \\ f'_{yx} & f'_{yy}\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\Delta x \\ \Delta y\end{bmatrix} \tag{二.3}$$

该式表示在极值点附近，随着 $(x,y)$ 在四周移动微小距离时，函数值的变化情况。上式右边部分其实就是矩阵二次型的形式（见 DezemingFamily 的《矩阵二次型》），二次型矩阵的特征值与特征向量其实表示的是这个矩阵达到某一个值的快慢。矩阵二次型相乘以后得到的其实是一个数（如上式，大家可以自己乘一下），当中间的矩阵 $H$ 被固定以后，我们设二次型 $\boldsymbol{x}^T H \boldsymbol{x} = a$，其中 $\boldsymbol{x}$ 是自变量。

向量沿着最大的特征值所在方向变化可以最快到达 $a$ 值，沿最小的特征值会最慢到达 $a$ 值，因为该矩阵向量运算的结果表示变化率，所以可以认为特征值大的方向（特征向量的方向）变化率大，特征值小的方向变化率小。

因此，根据二次型的两个特征值的大小关系就说明局部区域是否是边缘还是极值点。如果是极值，则朝两个特征值方向的变化率都很大，但如果是边缘区域，则只朝一个方向的变化率比较大，而朝另一个方向的变化率比较小。

## 三　总结

因为目前主要在图像方面有所应用，所以只写了图像方面的应用。其实海森矩阵与雅克比形式有很大联系，在多变量最优化和求解方程中都有很多应用。当以后遇到这些内容时会再对本文进行补充。

20210703：完成第一版。20220221：修改了一点符号，向量 $\boldsymbol{x}$ 表示的是列向量，行向量应该表示为 $\boldsymbol{x}^T$。

## 参考文献

[1] https://blog.csdn.net/caimouse/article/details/60465975

[2] Hessian 矩阵以及在图像中的应用：https://blog.csdn.net/lwzkiller/article/details/55050275