离散 Daubechies 小波分析

Dezeming Family

2022 年 5 月 1 日

DezemingFamily 系列书和小册子因为是电子书，所以可以很方便地进行修改和重新发布。如果您获得了 DezemingFamily 的系列书，可以从我们的网站 [https://dezeming.top/] 找到最新版。对书的内容建议和出现的错误欢迎在网站留言。

目录

一 空间投影 **1**
1 1 有限长信号的投影 1
1 2 构建正交矩阵 1

二 小波滤波器与矩阵 **2**
2 1 初步小波滤波器矩阵的构建 2
2 2 修改小波滤波器 2
2 3 周期延拓 3

参考文献 **3**

一　空间投影

1 1　有限长信号的投影

对于有限长的信号而言，设 V_{j+1} 空间的信号表示为（我们假设离散信号都是从 0 开始的）：

$$f_{j+1}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} a_{(j+1,k)}\phi_{(j+1,k)}(t) \tag{一.1}$$

设尺度滤波器的长度为 $L+1$（注意这样设置的目的只是为了让滤波器编号从 0 到 L，更简洁），即：

$$\mathbf{h} = [h_0, h_1, ..., h_L]^T \tag{一.2}$$

当要把 V_{j+1} 空间的信号投影到 V_j 空间时，矩阵为：

$$\begin{bmatrix} \ddots & \ddots & & & & & & & & \\ \cdots & \overline{h_1} & \overline{h_2} & \overline{h_3} & \overline{h_4} & \overline{h_5} & \overline{h_6} & \overline{h_7} & \overline{h_8} & \cdots \\ \cdots & \overline{h_{-1}} & \overline{h_0} & \overline{h_1} & \overline{h_2} & \overline{h_3} & \overline{h_4} & \overline{h_5} & \overline{h_6} & \cdots \\ \cdots & \overline{h_{-3}} & \overline{h_{-2}} & \overline{h_{-1}} & \overline{h_0} & \overline{h_1} & \overline{h_2} & \overline{h_3} & \overline{h_4} & \cdots \\ \cdots & \overline{h_{-5}} & \overline{h_{-4}} & \overline{h_{-3}} & \overline{h_{-2}} & \overline{h_{-1}} & \overline{h_0} & \overline{h_1} & \overline{h_2} & \cdots \\ \cdots & \overline{h_{-7}} & \overline{h_{-6}} & \overline{h_{-5}} & \overline{h_{-4}} & \overline{h_{-3}} & \overline{h_{-2}} & \overline{h_{-1}} & \overline{h_0} & \cdots \\ & & & & & & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cdots \\ 0 \\ 0 \\ a_{(j+1,0)} \\ a_{(j+1,1)} \\ a_{(j+1,2)} \\ \vdots a_{(j+1,N-1)} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{一.3}$$

由于很多点都是 0，所以可以简化一下。另外，由于系数都是实数，所以没有必要再用 *overline* 标志了。我们参考 D6 尺度滤波器（即 $L=5$，h_0 到 h_5 不为 0），令 $N=12$：

$$\begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_0 & h_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{(j+1,0)} \\ a_{(j+1,1)} \\ a_{(j+1,2)} \\ \vdots \\ a_{(j+1,11)} \end{bmatrix} \tag{一.4}$$

1 2　构建正交矩阵

上述矩阵很明显不是正交的，Haar 变换矩阵之所以恰好正交是因为它只有两个系数 h_0 和 h_1。其实方法也很简单，warp 一下就可以了：

$$\begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5 \\ h_4 & h_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \\ h_2 & h_3 & h_4 & h_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_0 & h_1 \end{bmatrix} \tag{一.5}$$

注意前四行分别与第五行和第六行正交，因为：

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k h_{k-2l} = \delta(l) \tag{一.6}$$

去除掉为 $h_k = 0$ 的项，写为：

$$
\begin{aligned}
&h_0h_2 + h_1h_3 + h_2h_4 + h_3h_5 = 0 \quad (l = 1)\\
&h_0h_4 + h_1h_5 = 0 \quad (l = 2)
\end{aligned}
$$

上式中，第一个式子对应了矩阵第一行与矩阵第五行的正交性，以及矩阵第三行与矩阵第五行的正交性；第二个式子对应了矩阵第一行和矩阵第六行的正交性，以及矩阵第五行和矩阵第六行的正交性。

由此我们定义矩阵 $\mathcal{H}_{\frac{N}{2}}$，$N$ 为信号的长度，我们希望这个信号的长度 N 要远大于尺度滤波器系数的个数。最后，正如我们说过的那样，这是一个正交矩阵。

二　小波滤波器与矩阵

2 1　初步小波滤波器矩阵的构建

先把矩阵的形式写一下：

$$
\begin{bmatrix}
\ddots & \ddots & & & & & & & & \\
\cdots & \overline{g_1} & \overline{g_2} & \overline{g_3} & \overline{g_4} & \overline{g_5} & \overline{g_6} & \overline{g_7} & \overline{g_8} & \cdots \\
\cdots & \overline{g_{-1}} & \overline{g_0} & \overline{h_1} & \overline{g_2} & \overline{g_3} & \overline{g_4} & \overline{g_5} & \overline{g_6} & \cdots \\
\cdots & \overline{g_{-3}} & \overline{g_{-2}} & \overline{g_{-1}} & \overline{g_0} & \overline{g_1} & \overline{g_2} & \overline{g_3} & \overline{g_4} & \cdots \\
\cdots & \overline{g_{-5}} & \overline{g_{-4}} & \overline{g_{-3}} & \overline{g_{-2}} & \overline{g_{-1}} & \overline{g_0} & \overline{g_1} & \overline{g_2} & \cdots \\
\cdots & \overline{g_{-7}} & \overline{g_{-6}} & \overline{g_{-5}} & \overline{g_{-4}} & \overline{g_{-3}} & \overline{g_{-2}} & \overline{g_{-1}} & \overline{g_0} & \cdots \\
 & & & & & & & & \ddots & \ddots
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix}
\cdots \\ 0 \\ 0 \\ a_{(j+1,0)} \\ a_{(j+1,1)} \\ a_{(j+1,2)} \\ \vdots a_{(j+1,N-1)} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots
\end{bmatrix}
\tag{二.1}
$$

由于 $g_k = (-1)^k h_{1-k}$（$k = 1 - L, ..., 1$），不为 0 的尺度滤波器系数是 $h_0, h_1, ..., h_L$，因此不为 0 的小波滤波器系数就是 $g_{1-L}, ..., g_{-2}, g_{-1}, g_0, g_1$，出现了负索引。尽管负索引没有什么太大问题，但我们希望能跟 $\mathcal{H}$ 保持一致，因此需要一些特殊处理。

2 2　修改小波滤波器

如果滤波器不为 0 的系数为偶数个，设为 L，则我们定义 $\widetilde{G}(\omega) = -e^{-iL\omega}\overline{H(\omega + \pi)}$，此时也是满足：

$$
\begin{aligned}
&\left|\widetilde{G}(\omega)\right|^2 + \left|\widetilde{G}(\omega + \pi)\right|^2 = 1\\
&H(\omega)\overline{\widetilde{G}(\omega)} + H(\omega + \pi)\overline{\widetilde{G}(\omega + \pi)} = 0
\end{aligned}
\tag{二.2}
$$

由此可以得到小波滤波器系数表示为（需要证明，但不难，这里就省略了）：

$$
\widetilde{g}_k = (-1)^k h_{L-k}
$$

重新写一下 D6 小波滤波器投影矩阵：

$$
\mathcal{G}_{\frac{N}{2}\times N} =
\begin{bmatrix}
g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & g_4 & g_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & g_4 & g_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & g_4 & g_5 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & g_4 & g_5 \\
g_4 & g_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_0 & g_1 & g_2 & g_3 \\
g_2 & g_3 & g_4 & g_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_0 & g_1
\end{bmatrix}
\tag{二.3}
$$

一些性质：

$$\mathcal{H}_{\frac{N}{2}\times N}\mathcal{G}^T_{\frac{N}{2}\times N}=0_{\frac{N}{2}\times\frac{N}{2}}$$
$$\mathcal{G}_{\frac{N}{2}\times N}\mathcal{G}^T_{\frac{N}{2}\times N}=I_{\frac{N}{2}\times\frac{N}{2}}$$

最后，我们定义完整的矩阵 $\mathcal{W}_{N\times N}$：

$$\mathcal{W}_{N\times N}=\left[\frac{\mathcal{H}_{\frac{N}{2}\times N}}{\mathcal{G}_{\frac{N}{2}\times N}}\right] \tag{二.4}$$

该矩阵也是一个正交矩阵：

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_{N\times N}\mathcal{W}^T_{N\times N}&=\left[\frac{\mathcal{H}_{\frac{N}{2}\times N}}{\mathcal{G}_{\frac{N}{2}\times N}}\right]\left[\frac{\mathcal{H}_{\frac{N}{2}\times N}}{\mathcal{G}_{\frac{N}{2}\times N}}\right]^T=\left[\frac{\mathcal{H}_{\frac{N}{2}\times N}}{\mathcal{G}_{\frac{N}{2}\times N}}\right]\left[\begin{array}{c|c}\mathcal{H}^T_{\frac{N}{2}\times N} & \mathcal{G}^T_{\frac{N}{2}\times N}\end{array}\right]\\&=\left[\begin{array}{c|c}\mathcal{H}_{\frac{N}{2}\times N}\mathcal{H}^T_{\frac{N}{2}\times N} & \mathcal{H}_{\frac{N}{2}\times N}\mathcal{G}^T_{\frac{N}{2}\times N}\\ \hline \mathcal{G}_{\frac{N}{2}\times N}\mathcal{H}^T_{\frac{N}{2}\times N} & \mathcal{G}_{\frac{N}{2}\times N}\mathcal{G}^T_{\frac{N}{2}\times N}\end{array}\right]=I_{N\times N}\end{aligned} \tag{二.5}$$

注意：

$$\mathcal{H}_{\frac{N}{2}\times N}\mathcal{G}^T_{\frac{N}{2}\times N}=\left(\mathcal{G}_{\frac{N}{2}\times N}\mathcal{H}^T_{\frac{N}{2}\times N}\right)^T=0_{\frac{N}{2}\times\frac{N}{2}} \tag{二.6}$$

2 3 周期延拓

上述的 warp 操作很容易让人想到周期延拓，把非周期信号变为周期的信号。但是在小波分析中，我们不希望真的进行周期延拓，所以在后面的操作中，我们会进行“补 0”，这里先不再进行讲解，我们现在只是构建了这个正交矩阵而已，至于这个正交矩阵实际应该怎么用，我们后面会再进行解释。

投影的过程可以看作把信号系数 $a_{(j+1,k)}$ 与尺度滤波器脉冲响应系数 h_k 进行卷积（这里只是先暂时感受一下），因此很多时候放到频域里做相乘会更高效（FFT 的时间复杂度是 $O(n\log n)$，相乘的时间复杂度是 $O(n)$，所以总的时间复杂度不会超过 $O(n\log n)$）。我们先不考虑这些快速算法之类的内容，而是再回到投影上。在后面的内容里我们会从信号的投影角度来理解 Daubechies 小波分析。

参考文献

[1] Ruch D K , Fleet P V . Wavelet Theory: An Elementary Approach with Application[M]. John Wiley & Sons, 2009.

[2] https://zh.m.wikipedia.org/zh/多贝西小波