小波的多孔算法

Dezeming Family

2022 年 5 月 31 日

DezemingFamily 系列书和小册子因为是电子书，所以可以很方便地进行修改和重新发布。如果您获得了 DezemingFamily 的系列书，可以从我们的网站 [https://dezeming.top/] 找到最新版。对书的内容建议和出现的错误欢迎在网站留言。

目录

一　基本介绍

Mallat 算法的问题在于需要进行二抽样，所以每次分解后，低频部分的数据量就会减少一半，难以看清波形的变化。有一些方法，比如插值，可以使得分解后的信号长度不变，但问题在于使得逆变换困难。于此，引入了非抽样小波变换 (Undecimated Wavelet Transform)。非抽样小波变换又被称为多孔算法 (A'trous algorithm) 或者平稳小波变换 (Stationary Wavelet Transform)。

本文描述多孔算法的基本原理。

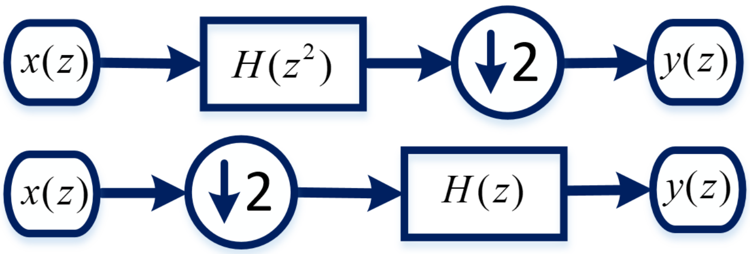
二　z 变换与小波变换

2 1　等效易位性

小波尺度滤波器可以用 z 变换的形式表示：

$$H(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k h_k z^k \tag{二.1}$$

z 变换具有等效易位性，即先下采样再通过滤波器 h_1，等同于通过另一个滤波器 h_2，然后再下采样,h_1 和 h_2 满足一定关系：



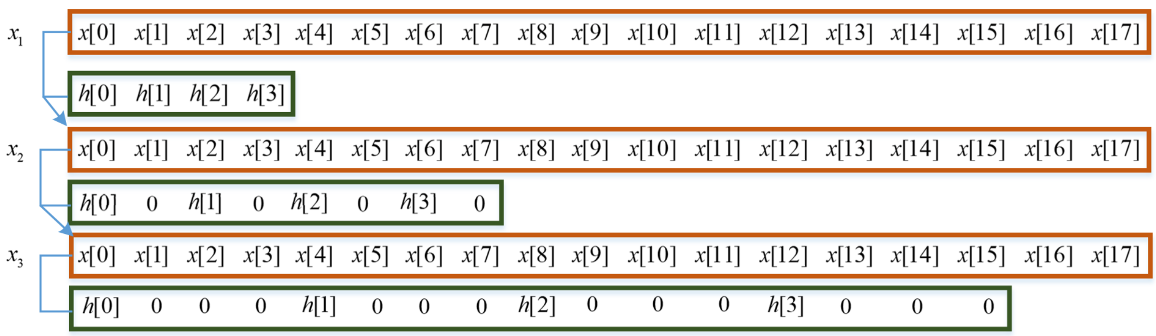
它跟小波变换有什么对应呢？我们下面再说。

2 2　过程推导

当一个信号通过 $H(z)$ 滤波器以后，里面的一半元素已经都没有用了，比如，假设原信号是 $x_1 = [x[0], x[1], ..., x[31]]$，在通过 $H(z)$ 滤波器以后，可以进行下采样。但是我们保留原始信号的长度，不进行下采样，作为 x_2。

如果此时我们还需要让 x_2 去再次进行信号分解，则需要在滤波器中隔点添加一个 0，这样虽然也相当于下采样操作，但会保留信号的原始长度。对于一个滤波器 $h_1[n]$，它的 z 变换为 $H(z)$；当隔点添加一个 0 以后，得到新的滤波器 $h_2[n]$ 的 z 变换就是 $H(z^2)$。当信号通过这个滤波器以后，得到 x_3，此时仍然不执行下采样，所以 x_3 的长度和 x_1 的长度一样。

我们现在将 x_3 进行信号分解，则需要继续往滤波器里隔点再添加两个 0（按照下采样，现在的信号长度本应该是 x_1 的四分之一，相当于要在滤波器里隔点总共添加 3 个 0）。得到新的滤波器 $h_3[n]$ 的 z 变换就是 $H(z^4)$。以此类推。

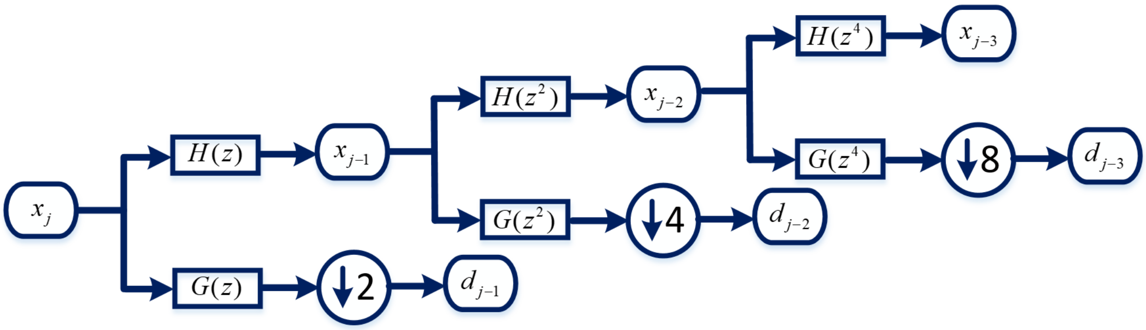


但是对于小波滤波器，我们不需要让其跟原始信号一样长，按照以前的方式依次减半即可。x_1 通过 g_1 滤波器以后，需要下采样一次，得到小波空间的分解信号。

然后隔点加 0 获得 g_2 滤波器。然后 x_2 要去通过 g_2 滤波器，此时的 x_2 和原信号一样长，经过 g_2 以后要四倍下采样（每四个点采样一个值）。以此类推。

2 3 多孔小波的整个过程

前面描述的整个过程可以用下图来进行描述：



这里之所以用 x_j 表示系数，是因为尺度信号并没有经过下采样，所以不能表示尺度分解结果 c_j。

设输入信号的长度是 N，不考虑滤波器长度，则多孔算法的计算复杂度是 $O(N\log_2 N)$。

三 频率上的解释

注意，本节并不是一个非常严谨的解释，只是为了帮助理解。

假如一开始 h_0 滤波器的频带是 $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$，高通滤波器的频带是 $[-\pi, -\frac{1}{2}\pi) \cup (\frac{1}{2}\pi, \pi]$。经过一次滤波以后，尺度信号的频带变为了 $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$。

现在，需要再次进行滤波，将尺度信号限定在 $[-\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi]$ 内。此时，还能用以前的滤波器吗？能，但前提是要将信号下采样一次，这里的下采样，由于信号经过了滤波，只剩下以前一半的频带，所以下采样不会造成信息损失。将一个信号下采样其实也相当于频带进行了压缩，所以可以继续使用以前的定义在 $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ 的尺度滤波器。也就是说，我们可以简单理解为，下采样把频带在 $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ 内的信号再次扩张到 $[-\pi, \pi]$ 内，由此可以再次进行滤波。

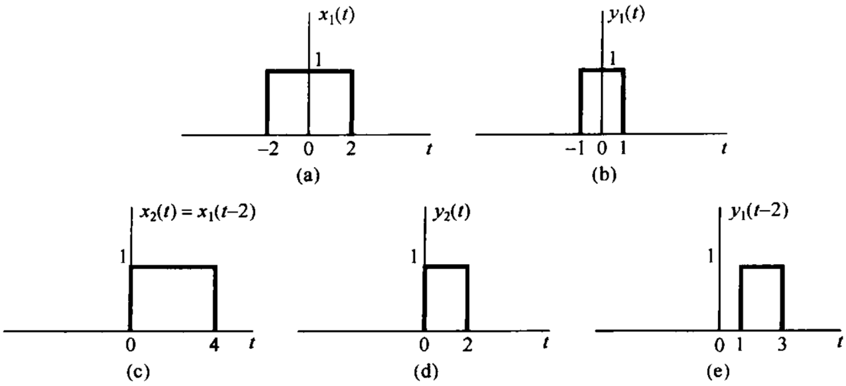
多孔算法属于另一种思路，它不压缩信号，而是给滤波器插 0。原始的尺度滤波器在隔点插一个 0 以后，在频率上的意义相当于使其拥有过滤更低频信号的能力。

四 基本性质

二进小波具有的性质是平移不变性（又叫时不变系统），也就是一个信号平移以后的二进小波变换等于它的二进小波变换的平移。

离散时不变系统，也就是输入 $x[n]$ 进行时移以后，变为 $x[n-n_0]$，则输入 $y[n]$ 就应当变为 $y[n-n_0]$；对于连续时不变系统，就是输入 $x(t)$ 进行时移以后，变为 $x(t-t_0)$，则输入 $y(t)$ 就应当变为 $y(t-t_0)$。

对于 $y(t) = x(2t)$ 这种系统 [2]，则相当于 $y(t)$ 是 $x(t)$ 的时间压缩关系，此时就不是时不变的。比如原始的信号是下图 (a)，经过系统以后，变为 (b)。信号时移两个单位后变为下图 (c)，然后再经过系统以后就变为了下图 (d)。而原始输出 (b) 直接时移两个单位得到 (e)，(e) 与 (d) 是不同的——也就是说，存在时间压缩关系的系统并不是时不变的。



由此，Mallat 分解同样不具备平移不变性，因为它需要进行抽取。由于多孔算法不需要进行抽取，它可以具备平移不变性。平移不变性的代价在于变换以后的信号，高频分量和低频分量的总长度都和原始信号一样长（对于要显示信号来说或许也可以称为好处），增加了数据存储量。

参考文献

[1] 孙延奎. 小波分析及其应用 (重点大学计算机教材)[M]. 机械工业出版社, 2005.

[2] 奥本海姆. 信号与系统 (第二版)[M]. 2010.