

# Dezeming Family

PBRT 系列 17-专业知识理论与代码  
实战-物理材质



DEZEMING FAMILY

DEZEMING

Copyright © 2022-07-23 Dezeming Family

**Copying prohibited**

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying and recording, or by any information storage or retrieval system, without the prior written permission of the publisher.

Art. No 0

ISBN 000-00-0000-00-0

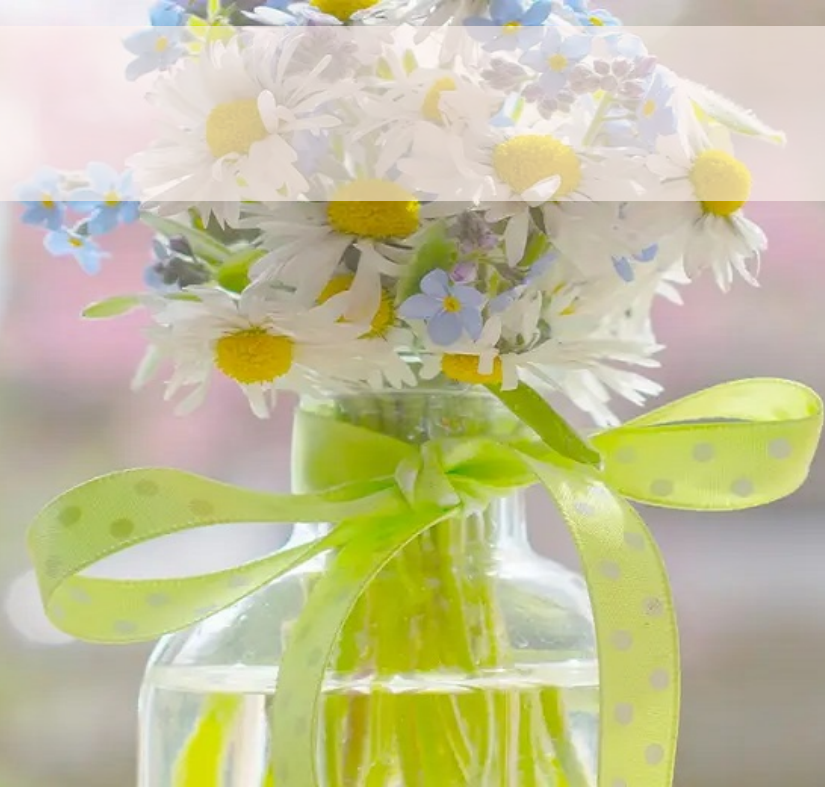
Edition 0.0

Cover design by Dezeming Family

Published by Dezeming

Printed in China

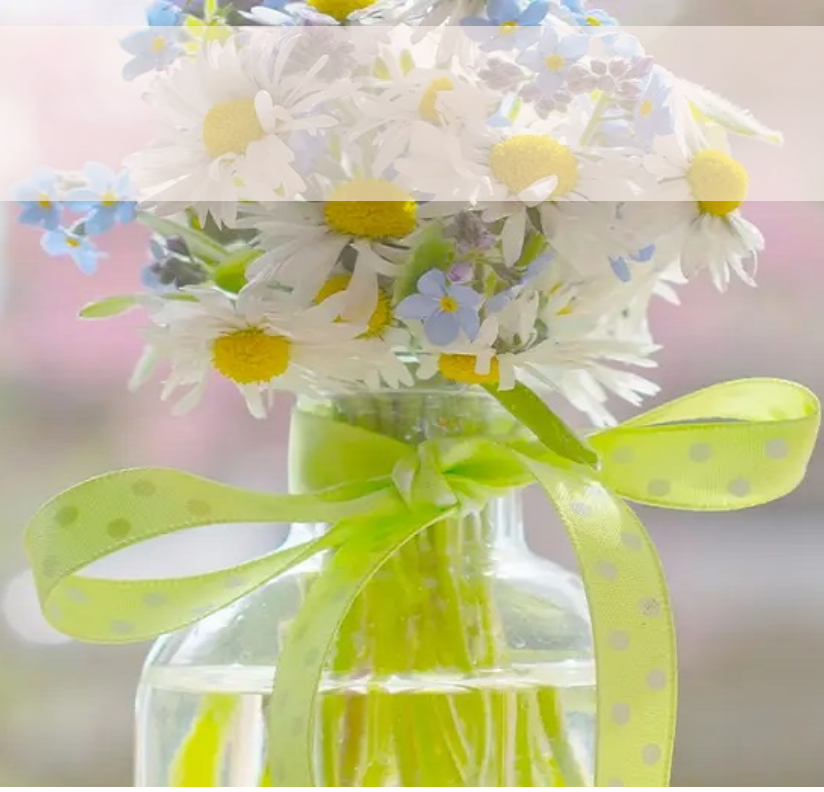
# 目录



0.1	<b>本文前言</b>	5
1	<b>镜面材质理论与菲涅尔项</b>	6
1.1	<b>镜面反射与折射</b>	6
1.2	<b>菲涅尔反射</b>	7
	1.2.1 电介质的菲涅尔项	7
	1.2.2 导体的菲涅尔项	8
1.3	<b>镜面材质</b>	9
	1.3.1 镜面反射类 SpecularReflection	9
	1.3.2 镜面透射类 SpecularTransmission	9
	1.3.3 同时可能存在折射与反射	10
2	<b>微表面理论</b>	12
2.1	<b>微表面模型概述</b>	12
2.2	<b>Oren-Nayar 漫反射反射</b>	13
2.3	<b>PBRT 中的微表面材质接口</b>	13
2.4	<b>微表面分布函数的基本原理</b>	13
2.5	<b>几何遮挡函数基本原理</b>	15
	2.5.1 几何遮蔽的归一化函数	15
	2.5.2 $G_1$ 函数的导出	16
	2.5.3 Torrance-Sparrow 模型	17

2.6	菲涅尔入射效应	18
3	几种具体的微表面材质模型 .....	19
3.1	BSDF::Sample_f 函数	19
3.2	关于 Sample_f 的一个简单直观的例子	20
3.3	多种 BxDF 组成的模型——塑料和金属材质	21
4	微表面材质的采样 .....	22
4.1	采样微表面	22
4.2	计算采样概率密度	22
4.3	本文结语	24
	Literature .....	24





*DezemingFamily* 系列文章和电子书全部都有免费公开的电子版，可以很方便地进行修改和重新发布。如果您获得了 *DezemingFamily* 的系列电子书，可以从我们的网站 [<https://dezeming.top/>] 找到最新的版本。对文章的内容建议和出现的错误也欢迎在网站留言。

## 0.1 本文前言

---

终于到专业知识理论部分的重头戏了——物理材质。在 PBRT 系列 12 中我们介绍了几种微表面材质，但是并没有非常仔细地讲解它的原理，因为仔细讲解可能会使得基础篇学习比较困难，我们当时的关注点在于如何快速掌握最基本的概念以及学会如何使用微表面材质渲染出更真实的物体。

现在，我们要注重专业知识和原理了，作为 PBRT 最重要的内容，我将会花更长的篇幅来讲解各种微表面材质的原理、菲涅尔项的原理，为的是以后在讲解更复杂的材质，例如各向异性材质、毛发渲染等打下基础（本书不涉及毛发渲染、各向异性材质渲染的内容，将会安排在 PBRT 高级渲染积分器之后）。

我们的系列书全都是免费公开的，但由于服务器实在是昂贵（一开始我们买的是联机打游戏用的服务器，自从光子映射作为第一本电子书被放在网站上以后，*DezemingFamily* 才正式开始，后来我们也不想再花费精力换服务器了），所以希望觉得本系列有帮助的读者们能够给予一定的支持。本系列全套售价为 120 元——当然，哪怕是赞助 5 块钱，我们都会很开心——免费公开的内容如果大家愿意支持，说明我们的系列书得到了认可，我们自然是非常开心的。

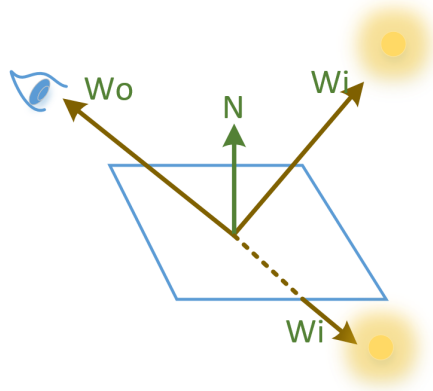
# 1. 镜面材质理论与菲涅尔项

1.1	镜面反射与折射	6
1.2	菲涅尔反射	7
1.3	镜面材质	9

本章详细讲解一些简单的镜面材质模拟的基本原理，也包括了菲涅尔项的原理和 *PBRT* 代码描述。

## 1.1 镜面反射与折射

镜面反射，即光的入射角（入射方向与法向量的夹角）等于出射角（出射方向与法向量的夹角）。注意，在表面材质模型中，入射方向和出射方向都是从表面点向外的：



一般情况下，折射符合 Snell 定律：

$$\eta_i \sin \theta_i = \eta_t \sin \theta_t \quad (1.1.1)$$

$\eta$  就是折射率。上式说明在折射图上， $\eta$  大的一边  $\theta$  小（大家可以回忆一下光斜着射入水中的示意图）。

在波动光学中，例如三棱镜可以将一束白光分解为不同颜色的条带（dispersion），我们在几何光学中忽略这种现象。

## 1.2 菲涅尔反射

除了反射和透射（transmit，也叫折射 refract）方向外，还需要计算反射或透射的入射光的比例。如何定义光被反射的比例，在物理学上，这个比例与方向是有关的，可以认为是入射方向与折射方向的函数（当然，对于光滑的材质来说，可以认为只是入射方向的函数，因为光滑材质给定入射方向以后，反射或者透射方向都是固定的）。菲涅尔方程描述了表面反射的光能量比例，菲涅尔方程是麦克斯韦方程组在光滑表面上的解。

给定折射率  $\eta$  和入射光线与表面法线的夹角，根据菲涅耳方程就能知道入射光的两种不同偏振状态下的材质的相应的反射率。在 PBRT 中，假设光是非偏振的，相对于光波它的方向是随机的——也就是说，菲涅尔反射是平行偏振项和垂直偏振项的平方的平均值

指定了入射照明的两种不同偏振状态下材料的相应反射率。由于偏振的视觉效果在大多数环境中是有限的，在 pbrt 中，我们通常假设光是非偏振的；也就是说，它相对于光波随机定向。在这种简化假设下，菲涅耳反射率是平行和垂直偏振项平方的平均值。

当然，菲涅尔项的假设前提是光滑平面，对于不光滑的微表面材质，可以在采样入射方向  $w_i$  以后再计算菲涅尔项。

存在菲涅尔项的物质分为三类：

- 电介质 (dielectrics)：例如玻璃、空气和水，这些物质不导电（水导电的原因是里面的杂质离子，水本身不导电）。
- 导体 (conductors)：例如各种金属。
- 半导体 (Semiconductors)，例如硅和锗，PBRT 中并不涉及。

### 1.2.1 电介质的菲涅尔项

导体和电介质都由同一组菲涅耳方程控制。尽管如此，PBRT 为电介质创建一个特殊的计算函数，使得折射率为实数值时采用的特别简单的形式（导体的折射率需要用复数表示，包含了吸收光能转化为热能的部分，我们后面会介绍）。为了计算两种电介质相界处的菲涅耳反射率，我们需要知道两种介质的折射率。电介质的菲涅耳反射公式为：

$$r_{\parallel} = \frac{\eta_t \cos \theta_i - \eta_i \cos \theta_t}{\eta_t \cos \theta_i + \eta_i \cos \theta_t}$$

$$r_{\perp} = \frac{\eta_i \cos \theta_i - \eta_t \cos \theta_t}{\eta_i \cos \theta_i + \eta_t \cos \theta_t}$$

注意  $\eta_t$  表示透射过去的光线所处的电介质折射率。对于非偏振光来说，菲涅尔反射是（注意，虽然下标  $t$  表示穿透过去的方向，但下式计算的是反射的比例）：

$$F_r = \frac{1}{2}(r_{\parallel}^2 + r_{\perp}^2) \quad (1.2.1)$$

因此根据能量守恒，穿透过去的能量就是（假设能量没有被吸收）：

$$1 - F_r \quad (1.2.2)$$

上面的计算实现在了 `FrDielectric()` 函数中。我们需要注意光的方向，来判断光是从哪个电介质射入到表面交点，然后射出到另一个电介质。一个表面是有法向量的，法向量指向表面外部。该函数中首先会判断是否是入射到模型内，`bool` 变量 `entering` 即根据 `wi` 与法向量的夹角进行判断。我们前面说过，在渲染中，光线从模型内部射到交点的方向跟模型外部射到交点的方向都是取模型交点向外的方向。

```
1  bool entering = cosThetaI > 0.f;
2  if (!entering) {
3      std::swap(etaI, etaT);
4      cosThetaI = std::abs(cosThetaI);
5  }
```

我们根据  $\cos\theta_i$  以及两个介质的折射率就能够计算出出射方向的  $\theta_t$ ：

```
1  float sinThetaI = std::sqrt(std::max((float)0, 1 - cosThetaI *
    cosThetaI));
2  float sinThetaT = etaI / etaT * sinThetaI;
```

当光从折射率较大的电介质射入折射率较小的电介质时，如果角度倾斜较大，就会发生全反射现象，此时计算得到的 `sinThetaT` 值就会大于 1，我们需要按照全反射来处理：

```
1  // Handle total internal reflection
2  if (sinThetaT >= 1) return 1;
```

当光斜着从水中射到空气中，就容易看到全反射现象。

`Fresnel` 类是菲涅尔项的统一接口，分为 `FresnelDielectric`、`FresnelConductor` 和 `FresnelNoOp`（理想材质，表示不吸收任何光，光能全部被反射出去）。`FresnelDielectric` 类的 `Evaluate()` 函数就是调用了 `FrDielectric()` 函数来计算的。

### 1.2.2 导体的菲涅尔项

导体有个特点，就是会吸收一些光能来产生热能，导体的菲涅尔反射包括了这个过程。此时，折射率为：

$$\bar{\eta} = \eta + ik \quad (1.2.3)$$

复数项的  $k$  表示吸收项。对一些金属来说，菲涅尔项的实数部分和复数部分的系数都是与光的波长有关的，在图形学中，可以拟合出其对于 RGB 光谱的吸收表示。

在导体和电介质表面的菲涅尔项中的  $r_{\parallel}$  和  $r_{\perp}$  可以参考书 [1] 的 8.2.1 节。另外：

$$\eta + ik = \bar{\eta}_t / \bar{\eta}_i \quad (1.2.4)$$

表示相对折射率。

由于导体不透光，所以对于导体材质模型来说，永远都是光从导体外面射向导体。因此，`FresnelConductor` 类的 `Evaluate()` 函数在调用 `FrConductor()` 时，会将传入的 `cosThetaI` 值去绝对值。



## 1.3 镜面材质

PBRT 有两个关于镜面的 BxDF 派生类，一是镜面反射 SpecularReflection 类，二是镜面透射（折射）SpecularTransmission 类。

### 1.3.1 镜面反射类 SpecularReflection

对于镜面反射，给定光源的出射方向  $\omega_r$ ，仅会有一个入射方向  $\omega_i$ ，因此，镜面反射的 BSDF 就可以写为：

$$f_r(\omega_o, \omega_i) = \delta(\omega_i - \omega_r)F_r(\omega_i) \quad (1.3.1)$$

注意渲染方程对于光滑镜面反射可以写为：

$$\begin{aligned} L_o(\omega_o) &= \int f_r(\omega_o, \omega_i)L_i(\omega_i)|\cos\theta_i|d\omega_i \\ &= f_r(\omega_o, \omega_i)L_i(\omega_i)|\cos\theta_i| \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

$$\text{and : } f_r(\omega_o, \omega_i) = \begin{cases} 1 & \omega_o = \omega_r \\ 0 & \omega_o \neq \omega_r \end{cases} \quad (1.3.3)$$

但是上式是错的，因为我们不需要这个  $\cos$  项（除了被菲涅尔效应吸收的光能，其它光能都是完全被反射走的。因此没有  $\cos$  项的影响），所以，BSDF 需要修正为：

$$f_r(\omega_o, \omega_i) = \frac{\delta(\omega_i - \omega_r)F_r(\omega_i)}{|\cos\theta_r|} \quad (1.3.4)$$

注意 PBRT 书 [1] 上写成了  $F_r(\omega_r)$ ，我个人认为是不太科学的，因为菲涅尔其实仅需要光的入射方向就能决定，所以最好就是写为  $F_r(\omega_i)$ 。

SpecularReflection 的  $f()$  函数返回  $\text{Spectrum}(0.f)$ ；这是因为它是一个 Delta 函数，给定入射方向和出射方向，从实践意义来说永远不可能出射方向  $\omega_o$  恰好等于镜面反射的方向  $\omega_r$ 。

对于  $\text{Sample}_f()$  函数，采样光源入射方向  $w_i$  是恒定的（根据镜面反射公式来计算），因此 pdf 也就等于 1.0。

### 1.3.2 镜面透射类 SpecularTransmission

透射的情况会稍微复杂一点，我们慢慢介绍。

根据前面的描述，我们知道折射出去的能量占入射能量的比例为：

$$\tau = 1 - F_r(\omega_i) \quad (1.3.5)$$

从功率角度（能流，flux）来说，就是折射出去的功率等于入射的功率乘以  $\tau$ ，微分表示为：

$$d\Phi_o = \tau d\Phi_i \quad (1.3.6)$$

根据辐射度的定义（第二行表示立体角转化为球面角，把  $d\omega$  分解为  $\sin\theta d\theta d\phi$ ）：

$$\begin{aligned} L_o \cos\theta_o dA d\omega_o &= \tau(L_i \cos\theta_i dA d\omega_i) \\ L_o \cos\theta_o dA \sin\theta_o d\theta_o d\phi_o &= \tau(L_i \cos\theta_i dA \sin\theta_i d\theta_i d\phi_i) \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

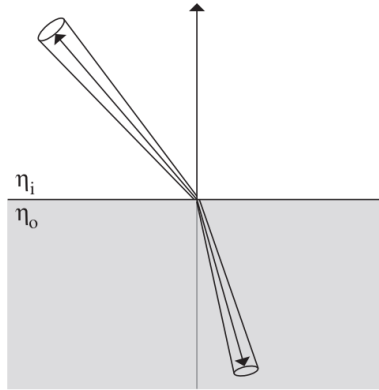
注意 Snell 定律及其微分:

$$\begin{aligned}\eta_o \sin \theta_o &= \eta_i \sin \theta_i \\ \eta_o \cos \theta_o d\theta_o &= \eta_i \cos \theta_i d\theta_i \\ \frac{\eta_i}{\eta_o} &= \frac{\cos \theta_o d\theta_o}{\cos \theta_i d\theta_i}\end{aligned}\quad (1.3.8)$$

代入到式子1.3.7中, 可以得到:

$$\begin{aligned}L_o \eta_i^2 d\phi_o &= \tau L_i \eta_o^2 d\phi_i \\ L_o &= \tau L_i \frac{\eta_o^2}{\eta_i^2}\end{aligned}\quad (1.3.9)$$

当光从空气斜着射入水时,  $\eta_i < \eta_o$ , 如果忽略菲涅尔项, 看起来就像辐射度被放大了:



同理, 我们在 BSDF 函数中应该除以  $|\cos \theta_i|$  项, 得到:

$$f_r(\omega_o, \omega_i) = \frac{\eta_o^2}{\eta_i^2} (1 - F_r(\omega_i)) \frac{\delta(\omega_i - \omega_t)}{|\cos \theta_i|} \quad (1.3.10)$$

其中,  $\omega_t$  就是给定光的入射方向以后根据折射定律计算得到的出射方向。

SpecularTransmission::Sample\_f() 函数中, 首先会判断是否发生了折射, 如果没有发生折射, 就返回 0; 否则就根据菲涅尔项计算折射的光的比例。

### 1.3.3 同时可能存在折射与反射

为了模拟同时存在折射和反射的材质 (这也是最一般的情况, 即  $F_r$  表示被反射的比例,  $1 - F_r$  表示被折射的比例), PBRT 建立了 FresnelSpecular 类:

```

1 // FresnelSpecular::Sample_f()
2 float F = FrDielectric(CosTheta(wo), etaA, etaB);
3 if (u[0] < F) {
4     // 采样镜面反射部分
5     .....
6     *pdf = F;
7 } else {

```

```
8 // 采样镜面透射部分
9 .....
10 *pdf = 1 - F;
11 }
```

注意因为有些光被折射，有些光是被反射，我们只能采样一条光线的方向，所以 pdf 不再是 1，而是等于菲涅尔项（采样反射还是折射的概率）。

在 PBRT 中，FresnelSpecular 仅在镜面 Glass 材质中，以及镜面次表面散射材质中会用到，当这些材质的粗糙度系数 `rough` 和 `vrough` 都是 0 时，则表示当前表面点的材质是镜面菲涅尔材质。

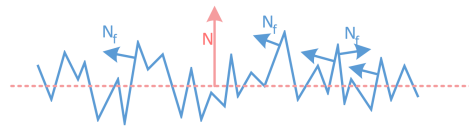
## 2. 微表面理论

2.1	微表面模型概述	12
2.2	Oren-Nayar 漫反射反射	13
2.3	PBRT 中的微表面材质接口	13
2.4	微表面分布函数的基本原理	13
2.5	几何遮挡函数基本原理	15
2.6	菲涅尔入射效应	18

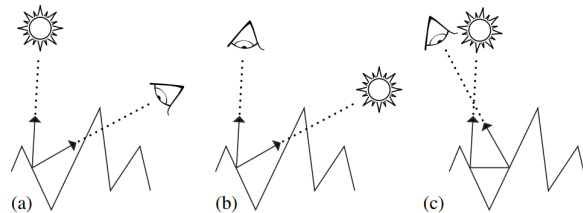
本章讲解微表面材质的基本理论知识。*Torrance* 和 *Sparrow* 于 1967 年发表了微表面模型，在 1977 年由 *Blinn* 引入到了图形学中；而现在使用的更广泛的变体是 *Cook* 和 *Torrance* 的微表面模型。我们本章就逐步带大家去认识 *Cook-Torrance* 微表面模型。

### 2.1 微表面模型概述

我们可以认为一个粗糙的表面是一大堆朝各个方向的微小表面组成，可以建模为“高度场”，即高度不一的一堆微小的表面组成：



由此会带来三种效应：



即遮挡 (Masking, 上图 (a), 有的表面遮挡了其他的表面)、阴影 (Shadowing, 上图 (b), 表面遮挡了发射过来的光) 和相互反射 (Interreflection, 上图 (c), 光弹射多次进入人眼, 有可能相互反射光导致人看到的亮度会更亮)。

微表面模型来进行基于统计的建模，也就是说，我们看到的照明结果是根据一定的分布来计算得到的，比如根据分布计算出光源被遮挡的比例比较大，则照明结果相对就比较暗。

微表面模型的两个主要组成部分：(1) 微小平面分布的表示；(2) 描述光如何从单个微表面散射的 BSDF。我们的任务是推导一个闭式表达式，给出描述此类表面散射的 BRDF。



对于每个微表面，我们可以认为它是完美镜面反射的，由于单位面积中的微表面朝向各个方向镜面反射的量不同，所以我们整体感受到并不是完美的镜面反射；当然，对于微表面模型来说也有例外，比如 Oren-Nayar 模型认为微表面是漫反射 Lambertian 的。

## 2.2 Oren-Nayar 漫反射反射

---

Oren 和 Nayar 在 1994 年观察到，现实世界中的物体并不表现出完美的 Lambertian 反射。在书 [1] 中有不是很详细的介绍，我再做一些简单的补充（这并不是我们本章的重点，所以不完整介绍理论知识）。根据论文可知，他们认为可以用一堆对称的 V 形表面来模拟漫反射表面：



该模型考虑了后向散射 (back scattering)，即微表面向光源方向反射的能量更多。他们还假设每个微表面的表面积  $da$  远小于每个像素能看到的表面面积  $dA$ ，同时入射光线波长的尺度又远小于微表面的面积，由此可以推导反射模型。由于遮挡、阴影和相互反射等没有解析解，所以他们提供了近似解。

在 PBRT 中，`OrenNayar::f()` 就是根据该模型的 BRDF 来计算的，而 `OrenNayar::Sample_f()` 则是按照  $\cos\theta$  来采样的，即使用其父类 `BxDF` 的采样方式。

## 2.3 PBRT 中的微表面材质接口

---

我们前面讲过，很多微表面模型都认为每个微表面都是镜面反射的，这在模拟金属、毛玻璃和塑料等材质中非常有效。

`BxDF` 类的派生类 `MicrofacetReflection` 和 `MicrofacetTransmission` 中，包含了一个指向 `MicrofacetDistribution` 类的指针，`MicrofacetDistribution` 类是描述微表面分布的类，定义在 `Microfacet.h` 和 `Microfacet.cpp` 文件中。

`MicrofacetReflection` 类还包含了一个指向 `Fresnel` 类型的指针（注意这是菲涅尔基类）；`MicrofacetTransmission` 类则是包含了 `FresnelDielectric` 对象，意味着微表面透射的菲涅尔项仅可能是电介质有关。

对于塑料材质 `PlasticMaterial`，`MicrofacetReflection` 对象的 `Fresnel` 指针指向的是 `FresnelDielectric` 材质（注意这按理来说并不是可以透光的塑料）；对于金属材质 `MetalMaterial`，`MicrofacetReflection` 对象的 `Fresnel` 指针指向的是 `FresnelConductor` 材质。

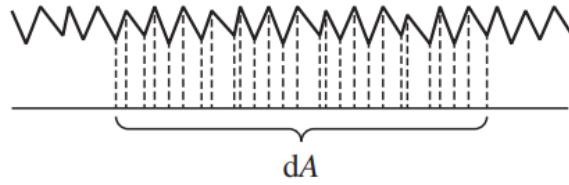
一个全面的微表面 `BxDF` 主要包含了三个项：微表面分布函数（又叫法向量分布函数）、微表面遮挡函数（又叫几何函数、阴影函数）、菲涅尔效应函数。

## 2.4 微表面分布函数的基本原理

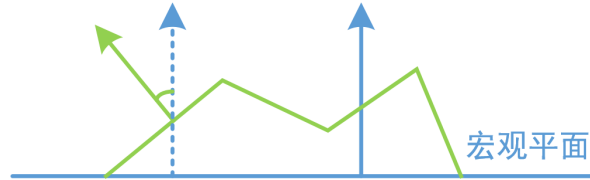
---

微表面分布函数的原理可以说是物理材质中可能遇到的第一个比较难理解的地方，因为很多人都不太理解里面的归一化公式含义，在这里我会进行比较详细的解释。

在平滑结构的一个区域  $dA$  内，微表面的投影面积也要等于  $dA$ ：



投影面积应该这么计算：



绿色箭头表示某一片微表面法向量，蓝色箭头表示宏观看到的整体法向量（比如，实际来说，在一个三角面片上通过三个顶点计算出来的法向量）。对于固定大小的微表面，微表面法向量与宏观法向量夹角越小，则投影面积越大。

我们假设在  $dA$  面积内，法向量朝向  $\omega_h$  的微表面总面积为  $A_h$ ，因此（ $n$  表示宏观法向量）：

$$dA = \int_{\mathcal{H}^2} A_h(\omega_h \cdot n) d\omega_h \quad (2.4.1)$$

$(\omega_h \cdot n)$  可以写作  $\cos \theta_h$ ， $\theta_h$  表示微表面法向量  $\omega_h$  与宏观法向量之间的夹角。两边同时除以  $dA$ ：

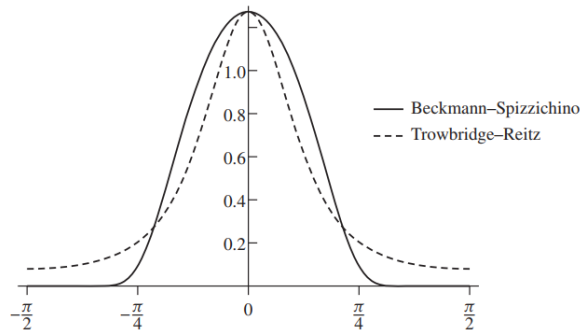
$$1 = \int_{\mathcal{H}^2} \frac{A_h}{dA} \cos \theta_h d\omega_h \quad (2.4.2)$$

我们可以把  $\frac{A_h}{dA}$  写作  $D(\omega_h)$ ，表示微表面（法向量）分布函数（意味着朝向某个方向的微表面所占的比例）。现在，分布函数的归一化性质就可以写为大家常见的形式：

$$1 = \int_{\mathcal{H}^2} D(\omega_h) \cos \theta_h d\omega_h \quad (2.4.3)$$

有些时候我们也会用投影立体角来解释  $\cos \theta_h d\omega_h$ ，但从投影立体角的角度并不能很直接地理解上式。

PBRT 书 [1] 中给出了两种微表面分布，即 BeckmannDistribution 和 TrowbridgeReitzDistribution，这些微表面分布函数看起来都像是关于  $\theta_h$  的正态分布函数：



这两种分布都可以扩展为各向异性微表面分布，我们本书不涉及这些内容，留到以后再介绍（各向异性 BSDF 并不难，但构建各向异性材质时需要考虑一些软件架构和纹理等层面上的信息）。

## 2.5 几何遮挡函数基本原理

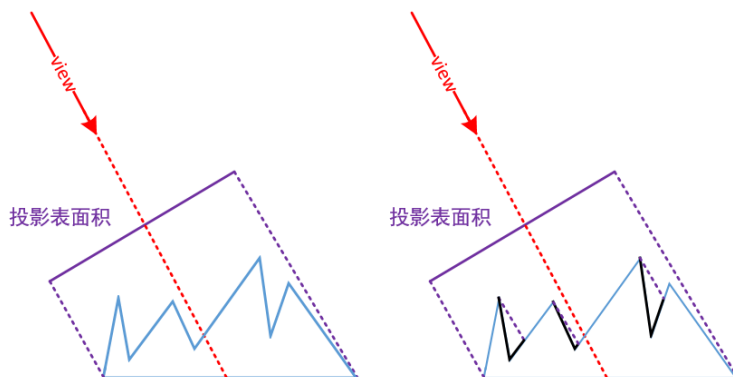
几何遮挡函数更为复杂一些（可以参考这篇五十多页的文章 [2]），在这里我希望能用更简单直白的方式给大家讲解清楚。

关于某些我会强调不必彻底理解的内容，希望大家在学习的过程中千万不要钻牛角尖，据我所知，很多内容在以前的论文中也都是没有明确说明的——很多模型只是好用，有的模型没有闭式解，而是建立查找表。

我们掌握几何遮蔽函数的关键：归一化与投影面积。同时注意，在描述的过程中，宏观的几何向量会被变换到局部坐标系，也就是法向量为  $n = (0, 0, 1)$ ，我们用  $\omega_g$  来表示  $n$ ，下标  $g$  即几何法向量。

### 2.5.1 几何遮蔽的归一化函数

当考虑到遮挡时，我们参考下图：



黑色部分表示被遮挡的、看不到的部分。设  $\text{view}$  的反方向为  $\omega_o$ ，设反方向是因为表面上的方向都是从交点向外发出的。此时的投影方向是  $\omega_o$ ，单位投影面积写为：

$$(\omega_o \cdot \omega_h) D(\omega_h) \quad (2.5.1)$$

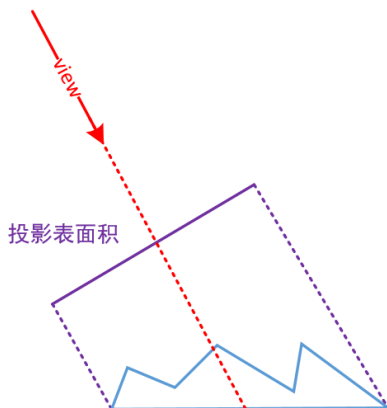
但是背向投影方向的表面是不贡献到投影表面积上的，因此我们使用  $\langle \rangle$  符号：

$$\langle a \cdot b \rangle = \max(0, a \cdot b) \quad (2.5.2)$$

又因为能投影的表面面积有些会被遮挡，我们定义遮挡系数  $G_1(\omega_o, \omega_h) \in [0, 1]$ ，表示被遮挡的区域的比例。此时，投影面积  $P_A$  就可以写为：

$$P_A = \int_{\mathcal{H}^2} G_1(\omega_o, \omega_h) \langle \omega_o \cdot \omega_h \rangle D(\omega_h) d\omega_h \quad (2.5.3)$$

对于下面这种情况，没有任何微表面法向量背向投影方向，且没有任何相互遮挡，此时， $G_1(\omega_o, \omega_h)$  对下面的任何  $\omega_h$  方向都是 1（注意，对于任意方向分布都有的微表面，只有当  $\omega_o = \omega_g$  时才满足  $G_1(\omega_o, \omega_h) \equiv 1$ ）， $\langle \omega_o \cdot \omega_h \rangle = (\omega_o \cdot \omega_h)$ ：



当  $dA = 1$ ，即单位面积，则投影面积就是  $P_A = (\omega_o \cdot \omega_g)$ ，因此：

$$\cos \theta_o = (\omega_o \cdot \omega_g) = \int_{\mathcal{H}^2} G_1(\omega_o, \omega_h) \langle \omega_o \cdot \omega_h \rangle D(\omega_h) d\omega_h \quad (2.5.4)$$

### 2.5.2 $G_1$ 函数的导出

我们已经得到了  $G_1$  的归一化函数表示，但是应该如何导出  $G_1$  呢？

设  $A^+(\omega_o)$  表示朝向前面的微表面的投影面积（即法向量  $(\omega_o \cdot \omega_h) > 0$ ）， $A^-(\omega_o)$  表示被朝向后面的微表面遮挡的投影面积（因为微表面是通过高度场来建模的，看起来就像一个个尖角，朝向前面的微表面只会被朝向后面的微表面遮挡），因此得到关系：

$$\begin{aligned} G_1(\omega_o) &= \frac{A^+(\omega_o) - A^-(\omega_o)}{A^+(\omega_o)} \\ \cos \theta_o &= A^+(\omega_o) - A^-(\omega_o) \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

$\cos \theta_o$  就是单位面积投影到  $\omega_o$  方向的投影面积。上面的关系好像能看出点什么端倪了。为了进一步推导，我们定义一个辅助函数：

$$\begin{aligned} \Lambda(\omega_o) &= \frac{A^-(\omega_o)}{A^+(\omega_o) - A^-(\omega_o)} = \frac{A^-(\omega_o)}{\cos \theta_o} \\ G_1(\omega_o) &= \frac{1}{1 + \Lambda(\omega_o)} \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

即 PBRT 中的 `MicrofacetDistribution::Lambda` 函数。

事实上，有很多方程都可以满足式 2.5.4，我们需要一些假设（比如相邻点之间的高度没有相关性，当然，这种假设是不太合理的，毕竟相邻点之间高度应该差不多一致），来得到特定的  $\Lambda(\omega_o)$  函数。有些时候，我们还会假设视线方向与光照方向的遮挡函数都是存在的且相互独立，也就是说：

$$G_1(\omega_o, \omega_i) = G_1(\omega_o)G_1(\omega_i) \quad (2.5.7)$$

我们不再细讲  $\Lambda(\omega_o)$  函数的推导过程，因为主要都是数学相关的内容，并不会对理解上造成什么影响。



### 2.5.3 Torrance-Sparrow 模型

Torrance-Sparrow 模型假设所有的微表面都是镜面，也就是说，当散射为反射时，给定光入射方向  $\omega_i$  和观察方向  $\omega_o$ ，仅有法向量朝向  $\omega_h = \widehat{\omega_i + \omega_o}$  方向的微表面才会把光反射过去。

根据辐射度公式：

$$L = \frac{d\Phi}{d\omega dA^\perp}$$

$$L_i(\omega_i) = \frac{d\Phi_h}{d\omega dA^\perp(\omega_h)} = \frac{d\Phi_h}{d\omega \cos\theta_h dA(\omega_h)} \quad (2.5.8)$$

又因为：

$$dA(\omega_h) = D(\omega_h) d\omega_h dA \quad (2.5.9)$$

再次根据辐射度公式：

$$L(\omega_o) = \frac{d\Phi_o}{d\omega_o \cos\theta_o dA} \quad (2.5.10)$$

同时假设微表面反射是符合菲涅尔定律，也就是说：

$$d\Phi_o = F_r(\omega_o) d\Phi_h \quad (2.5.11)$$

以及一个我们会在“采样微表面”章节再解释的公式：

$$d\omega_h = \frac{d\omega_o}{4 \cos\theta_h} \quad (2.5.12)$$

把这些式子都带入，就能得到辐射度公式：

$$L(\omega_o) = \frac{F_r(\omega_o) L_i(\omega_i) D(\omega_h) d\omega_i}{4 \cos\theta_o} \quad (2.5.13)$$

注意，因为每个微表面是完美镜面反射（前面说过， $\omega_h$  是根据  $\omega_i$  和  $\omega_o$  计算出来的），同时我们再考虑几何遮挡项，就得到了 Torrance-Sparrow 模型的 BRDF：

$$f_r(\omega_o, \omega_i) = \frac{F_r(\omega_o) G_i(\omega_o, \omega_i) D(\omega_h)}{4 \cos\theta_o \cos\theta_i} \quad (2.5.14)$$

大家在百度一搜微表面模型，基本上都是上面这个公式。

在 MicrofacetReflection::f 函数中，会判断两种退化情况：

```
1 if (cosThetaI == 0 || cosThetaO == 0) return Spectrum(0.);
2 if (wh.x == 0 && wh.y == 0 && wh.z == 0) return Spectrum(0.);
```

第一行表示采样光线平行于表面或者光照光线平行于表面；第二行表示避免  $\omega_h$  为  $(0,0,0)$ ，这种情况表示采样 Ray 与光照光线平行且方向相反。

虽然  $\omega_h$  是根据  $\omega_i$  和  $\omega_o$ ，但前面我们只假设了反射的情况： $\omega_h = \widehat{\omega_i + \omega_o}$ 。我们现在再补充关于穿透的情况。

对于穿透：

$$d\omega_h = \frac{\eta_o^2 |\omega_o \cdot \omega_h| d\omega_o}{(\eta_i(\omega_i \cdot \omega_h) + \eta_o(\omega_o \cdot \omega_h))^2} \quad (2.5.15)$$

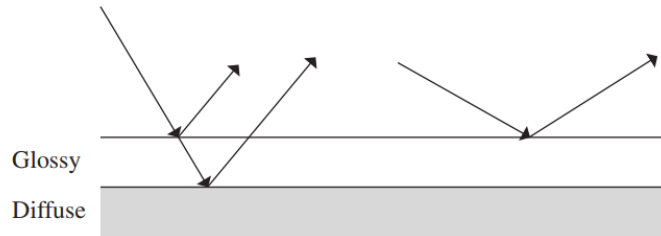
$\omega_h$  是根据入射和出射光线计算出的微表面法向量，推导并不复杂（可以在 PBRT 书 [1] 的菲涅尔项章节中找到对应关系）：

$$\omega_h = \omega_o + \frac{\eta_i}{\eta_o} \omega_i \quad (2.5.16)$$

注意此时的菲涅尔项是  $1 - F_r(\omega_o)$ 。

## 2.6 菲涅尔入射效应

有些材质不止一层，许多 BRDF 模型没有考虑菲涅尔反射使得到达分层对象底部的光量减少的现象：



考虑一下抛光的木桌或涂有光泽油漆的墙：如果你正面看它们的表面，你主要看到的是木材或油漆的颜色。当您视点移向一个扫掠角度时，由于菲涅尔效应导致光泽反射增加，因此看到的材质颜色更少。也就是说：当入射方向接近法线时，大多数光被传输到漫反射层，漫反射项占主导地位；当入射方向接近掠射时，光泽反射是主要的反射模式。

Ashikhmin 和 Shirley (2000、2002) 开发的 BRDF 模型对其上具有光泽镜面的漫反射面进行建模。注意，他们并不是建模来替换我们原来的 BRDF 函数中的  $F_r$ ，而是导出了一种新的 BRDF，即 FresnelBlend。

## 3. 几种具体的微表面材质模型

3.1	<a href="#">BSDF::Sample_f 函数</a>	19
3.2	<a href="#">关于 Sample_f 的一个简单直观的例子</a>	20
3.3	<a href="#">多种 BxDF 组成的模型——塑料和金属材质</a>	21

本章讲解比较具体的微表面材质模型,例如金属材质、塑料材质。我们还会重点介绍混合多种 *BxDF* 的材质在采样和计算上的原理。

### 3.1 BSDF::Sample\_f 函数

使用 BSDF::Sample\_f 函数,我们以 EstimateDirect 函数为例,该函数的前两行代码用来确定反射类型:

```
1 BxDFType bsdfFlags =  
2   specular ? BSDF_ALL : BxDFType(BSDF_ALL & ~BSDF_SPECULAR);
```

specular 默认是 false,此时 bsdfFlags 表示为二进制就是 [01111]。调用 BSDF 采样的函数是:

```
1 f = isect.bsdf->Sample_f(isect.wo, &wi, uScattering, &scatteringPdf,  
   bsdfFlags, &sampledType);
```

BSDF::Sample\_f 函数中首先会判断有多少种 BxDF 能够符合当前 [01111] 的要求,NumComponents 函数调用 MatchesFlags 函数:

```
1 bool MatchesFlags(BxDFType t) const { return (type & t) == type; }
```

然后根据随机数来抽取其中的一个 BxDF (comp 是随机数生成的表示抽取第几个 BxDF):

```
1 std::shared_ptr<BxDF>bxdf = nullptr;  
2 int count = comp;  
3 for (int i = 0; i < nBxDFs; ++i)  
4   if (bxdfs[i]->MatchesFlags(type) && count-- == 0) {  
5     bxdf = bxdfs[i];  
6     break;
```

```
7 }

```

注意 && 如果前面成立才会判断后面，所以 count- 只会在满足要求的 bxdfs[i] 时才进行。之后，就是根据抽取的 BxDF 来采样散射方向了。

抽取完散射方向以后，需要判断抽取的方向在整个材质中的 PDF 以及 BSDF 值。以下内容是我后来补充的，但是由于确实不太好叙述，所以如果读者读不太懂也没有关系。在 BSDF 中，所有的 BxDF 组成概率都是一样的，也就是说，如果一个 BSDF 材质中包含了一个 Lambertian 项和一个微表面项，那么这两个项在一次采样中被采样到的概率相同。有人可能会觉得有些怪——如果想要一个材质漫反射更多一些应该怎么办？其实设置 Lambertian 项中 Kd 参数更大即可，而不是设置 Lambertian 项和微表面项的比例。有人或许会问，如果该材质微表面反射更多一些，两种 BxDF 项等比例采样不就不是一种很好的方式吗？确实如此，但是把多种 BxDF 混合起来一起采样相对麻烦一些。相当于在每种符合采样项的 BxDF 函数中都计算散射的概率密度以及 BSDF 值，然后混合起来。计算 Pdf 的方式与 BSDF::Pdf 函数是相同的：

```
1 for (int i = 0; i < nBxDFs; ++i)
2   if (bxdfs[i]->MatchesFlags(flags)) {
3     ++matchingComps;
4     pdf += bxdfs[i]->Pdf(wo, wi);
5   }
6 if (matchingComps > 1) *pdf /= matchingComps;

```

## 3.2 关于 Sample\_f 的一个简单直观的例子

很多人不了解 Sample\_f 是因为他们缺乏比较直观的例子。

假设某种材质是由两个一样的 Lambertian 的 BxDF 组成。我们计算一下各种采样 PDF。首先我们需要保证的是两个 BxDF 的 Kd (Spectrum 对象) 各个项分别之和小于 1，否则能量就不守恒了。Lambertian 的  $f()$  永远是  $\frac{R}{\pi}$ ， $R$  就是 Kd 值。为了简单计算，假设采样到的散射方向的  $\cos\theta = 1$ ，也就是说，此时 Lambertian::Pdf 返回值为  $\frac{1}{\pi}$ 。

计算得到的 Pdf 为  $\frac{1}{\pi}$ ：

$$\frac{\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi}}{2} \tag{3.2.1}$$

计算得到的  $f$  为  $\frac{2R}{\pi}$ 。我们能感受到，在设计一种材质时，需要小心材质的各个部分的比例，免得计算出的光反射量比光入射量还要大。

我们做一个测试，定义一种错误的材质：MatteUnrightMaterial。该材质除了在 ComputeScatteringFunctions 函数中的下面几行，其他地方与 MatteMaterial 材质完全相同：

```
1 float sig = Clamp(sigma->Evaluate(*si), 0, 90);
2 if (!r.IsBlack()) {
3   if (sig == 0) {
4     for (int i = 0; i < 10; i++)

```



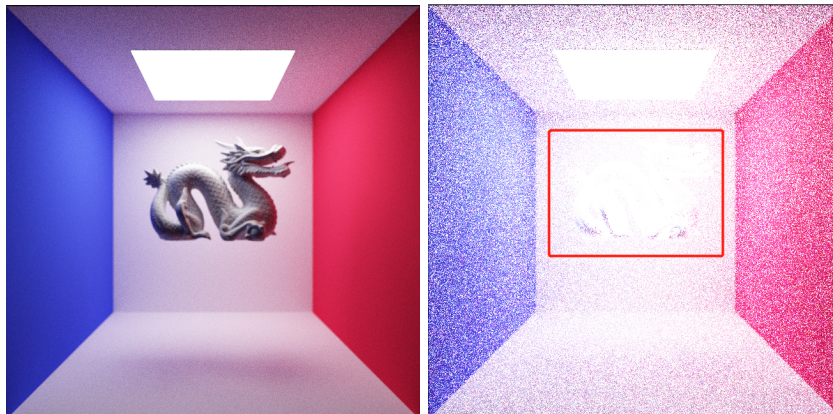
```

5     si->bsdf->Add(new LambertianReflection(r));
6   }
7 }

```

即 BSDF 变为了十倍的 LambertianReflection。在我的例子中，r 被设为了 Spectrum(0.75f)。

我们仅仅给场景中的龙使用该错误材质，得到如下结果（左边是添加了一倍的 LambertianReflection 的 BSDF，它是可以保证能量守恒的；右边是添加了十倍 LambertianReflection 以后的 BSDF，Spectrum(0.75f) 乘以 10 以后，rgb 各个分量都是大于 1 的，因此能量一定不守恒）：



不能量守恒的 BSDF 导致整个场景能量爆炸（事实上，路径追踪的采样轮数越多，会导致图像变得越亮，每次采样到龙以后，反射的光比例按角度计算后很容易大于 1）。相信通过这个例子大家就能对“怎样设计一个正确的物理材质”有了更深的认识。

### 3.3 多种 BxDF 组成的模型——塑料和金属材质

塑料材质较为简单，就是通过一个控制漫反射的因子  $K_d$  和一个微表面的因子  $K_s$  来得到塑料。注意能量守恒要求材质总的反射能量要小于 1，关于给定入射方向以后，材质的总反射能量分布半球积分后是否大于 1，PBRT 也没提供方法来检验，因此我们一般主要是靠直觉，或者用一些蒙特卡洛方法来采样测试。

金属材质因为更多依赖于菲涅尔项，所以可能参数看起来不是很好理解。金属材质中最重要的两个参数一个是  $\eta_i$ ，另一个是  $k$ ，构建菲涅尔项为：

```

1   Fresnel *frMf = new FresnelConductor(1., eta->Evaluate(*si), k->
    Evaluate(*si));

```

其中，第一个参数 1.0 表示菲涅尔项中的  $\eta_i$ ，第二个参数是  $\eta_t$ 。 $k$  是导体的吸收系数，我们前面讲过。

## 4. 微表面材质的采样

4.1	采样微表面	22
4.2	计算采样概率密度	22
4.3	本文结语	24

本章讲解微表面材质的采样方式，主要为根据 *BSDF* 来采样跟踪光线。

### 4.1 采样微表面

我们见 `MicrofacetReflection::Sample_f` 函数。该函数会根据我们预定义的微表面分布类型来采样  $\omega_h$ ，然后根据采样到的  $\omega_h$  来计算光源入射方向  $\omega_i$ ：

```
1 Vector3f wh = distribution->Sample_wh(wo, u);  
2     if (Dot(wo, wh) < 0) return 0.; // Should be rare  
3     *wi = Reflect(wo, wh);
```

然后计算 Pdf：

```
1 *pdf = distribution->Pdf(wo, wh) / (4 * Dot(wo, wh));
```

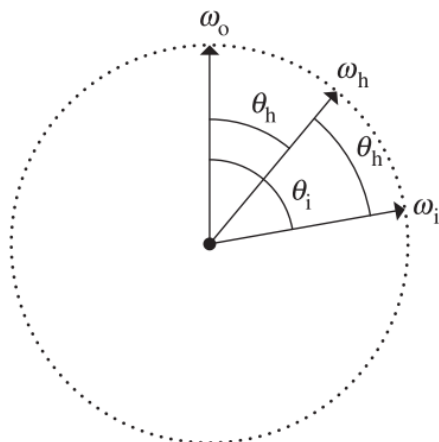
在这个步骤中，如何计算 Pdf 是我们还没有讲解过的内容。至于如何根据微表面分布来采样  $\omega_h$  完全是数学步骤，即根据 CDF 的反函数法来进行蒙特卡洛采样，该步骤并不影响我们理解整个过程，如果闭式表达式计算不出来，那么用“接受-拒绝法”也可以很好地采样 *BSDF*。

一些更详细的介绍可以参考 [4]。

### 4.2 计算采样概率密度

我们采样的是半角 Pdf (half-angle Pdf，即采样  $\omega_h$  方向的 Pdf)，而我们原本应该计算的是采样  $\omega_i$  方向的 Pdf，所以需要有一个对应的转换。

直觉上可能有人觉得，既然采样到的  $\omega_h$  就决定了  $\omega_i$  方向，那么采样  $\omega_h$  的 Pdf 不就应该等于采样  $\omega_i$  的 Pdf 吗？其实对于采样 Pdf 来说，我们应该从立体角去分析。我们会在本节末尾给出更形象的图，但在此之前我们先从立体角公式的角度思考一下。我们先看下图：



如何衡量  $d\omega_h$  和  $d\omega_i$  之间的关系？我们需要找一个轴作为“基准”，这个基准轴就是  $\omega_o$  方向的轴，基于该轴来定义  $d\omega_h$  和  $d\omega_i$  则可以很容易找到对应关系。我们回忆一下立体角微分的公式：

$$d\omega = \sin\theta d\theta d\phi \quad (4.2.1)$$

注意这里立体角微分中的  $\sin\theta$  与投影立体角中的  $\cos\theta$  项不要弄混了。

我们来看一下它们之间的对应关系如何转换：

$$\frac{d\omega_h}{d\omega_i} = \frac{\sin\theta_h d\theta_h d\phi_h}{\sin\theta_i d\theta_i d\phi_i} \quad (4.2.2)$$

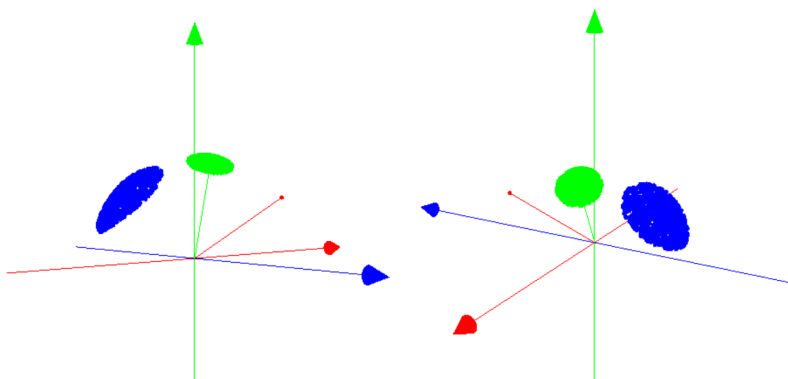
根据示意图， $\theta_i = 2\theta_h$ ，且注意它们处于同一经度，因此  $\phi_i = \phi_h$ ：

$$\frac{d\omega_h}{d\omega_i} = \frac{\sin\theta_h d\theta_h d\phi_h}{\sin 2\theta_h 2d\theta_h d\phi_i} = \frac{1}{4\cos\theta_h} = \frac{1}{4(\omega_i \cdot \omega_h)} = \frac{1}{4(\omega_o \cdot \omega_h)} \quad (4.2.3)$$

根据这个对应关系，我们得到转换后的 Pdf：

$$p_{\omega_i} = \frac{p_{\omega_h}}{4(\omega_o \cdot \omega_h)} \quad (4.2.4)$$

我们再画个图解释一下：



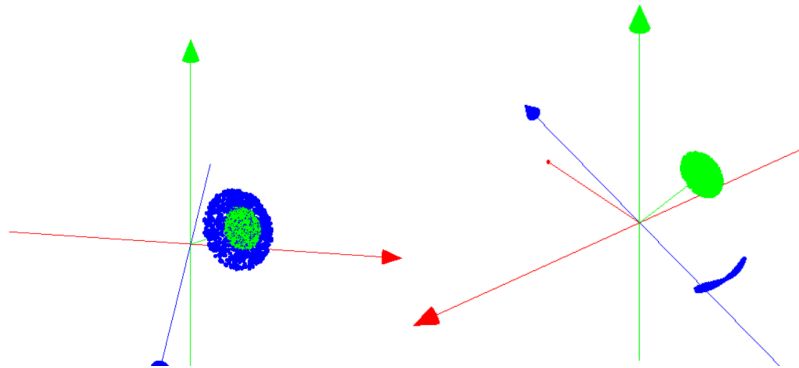
xyz 三轴被表示为了 RGB 三种颜色，此外，红色小圆点所在线段表示  $\omega_o$ 。我们随机生成一个  $\omega_h$  方向，并且保证该方向与  $\omega_o$  夹角小于  $90^\circ$ ，然后以  $\omega_h$  为基准，随机生成 1000 个数据：

$wh\_s[1000]$  (在图上就是绿色的小圆点集), 保证  $wh\_s[i]$  与  $wh$  的夹角足够小 (相当于在单位立体角中采样)。然后, 利用下式来得到  $wi\_s[1000]$  (在图上就是蓝色的小圆点集):

$$wi\_s[i] = reflect(wo, wh\_s[i]) \quad (4.2.5)$$

我们可以看到, 蓝色点集对应的立体角大小是大于绿色点集对应的立体角大小的。也就是说, 虽然采样到的  $wh$  决定了  $wi$ , 但是它们对应的立体角范围不同, 因此采样概率密度也不同, 需要一定的转化关系。

考虑两种极端的情况, 如下图。下图左表示  $wo$  和  $wh$  几乎处于同一个位置, 即  $dot(wo, wh) \approx 1$ , 此时,  $p_{\omega_h} \approx 4p_{\omega_i}$ ; 下图右表示  $wo$  几乎和  $wh$  垂直, 此时  $p_{\omega_h} \approx 0$  (示意图中没有排除掉  $wh\_s[i]$  与  $wo$  夹角不小于  $90$  度, 只是为了演示一下大小对应关系)。



对于穿透类型的微表面模型 MicrofacetTransmission 的 Pdf 也需要调整, 可以在书 [1] 第 14 章的 further reading 部分找到方法。

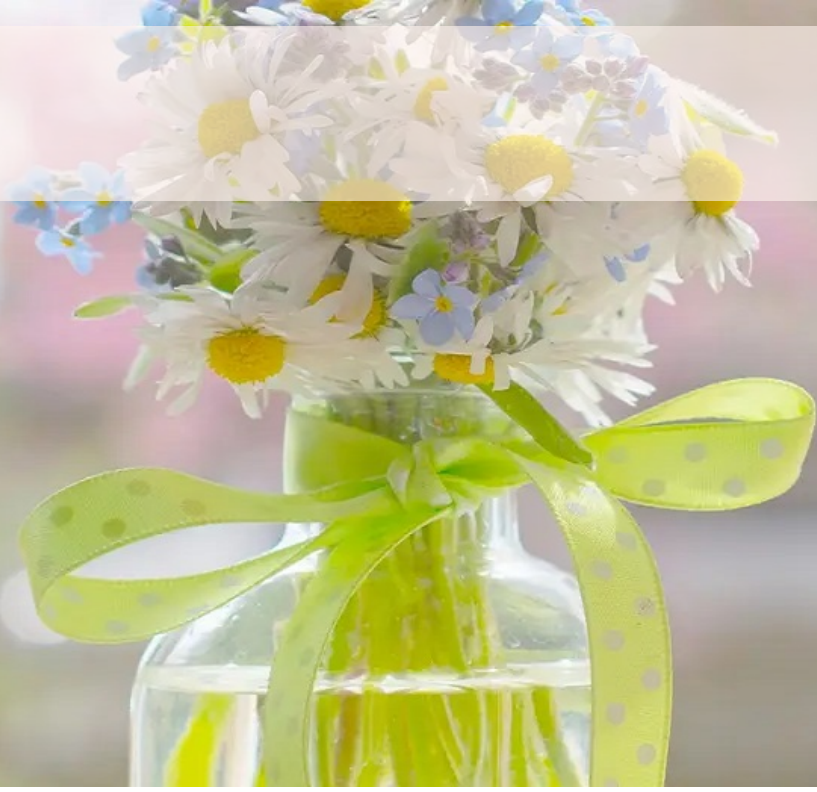
### 4.3 本文结语

到目前为止, 我想在本文中介绍的内容就都介绍完了。对一些大家可能难以理解和容易出错的地方都添加了不少示意图。

根据目前的规划, 我们只剩次表面散射一书, 就可以结束专业理论部分的内容, 开始更新高级积分器系列了。低差异序列和图像重建虽然也比较重要, 但是由于跟渲染的关系不是很大, 所以暂时不规划进行写作。

文本结束于 2022 年 8 月 2 号, 此前已经头痛两周了, 上午刚去做完核磁, 还没出结果。平时熬夜太多, 导致身体容易出现问题, 以后还是按时睡觉, 再也不熬夜了。





- [1] Pharr M, Jakob W, Humphreys G. Physically based rendering: From theory to implementation[M]. Morgan Kaufmann, 2016.
- [2] Eric Heitz, Understanding the Masking-Shadowing Function in Microfacet-Based BRDFs[M]. 2014.5
- [3] <https://learnopengl.com/>
- [4] <https://agraphicsguy.wordpress.com/2018/07/18/sampling-anisotropic-microfacet-brdf/>
- [5] <https://pbrt.org/scenes-v3>

