Woodcock-tracking 无偏性证明

Dezeming Family

2021 年 10 月 08 日

DezemingFamily 系列书和小册子因为是电子书，所以可以很方便地进行修改和重新发布。如果您获得了 DezemingFamily 的系列书，可以从我们的网站 [https://dezeming.top/] 找到最新版。对书的内容建议和出现的错误欢迎在网站留言。

20211010：完成第一版。20221229：添加了估计关于穿透率的直观解释。

目录

一 Woodcock 追踪的实际数学意义

Woodcock 追踪在论文 [1] 中证明是无偏的，但论文一的表述可能并不是非常亲民，所以在这里我打算重新表述一下。这里的描述是基于计算机图形学的，但并没有对证明过程进行修改。里面涉及到好几篇论文的方法，都在文中进行了引用。

穿透率描述了光移动某个距离 t 没有发生碰撞的概率（也可以描述为光沿着某个方向穿过介质以后剩余的比例）。穿透率（transmittance）[2] 描述为：

$$T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = e^{-\int_0^y \mu_t(\boldsymbol{x}-t\omega)dt} \tag{一.1}$$

即从 $\boldsymbol{x}$ 点到 $\boldsymbol{y}$ 点对衰减率 μ_t 的积分。

$$P(X>t) = T(t) \tag{一.2}$$

累积概率密度函数 $F(t)$ 是上述概率的互补概率，即：

$$F(t) = 1 - T(t) \tag{一.3}$$

概率密度函数 (PDF) 就可以表示为:

$$p(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(1-e^{-\tau(t)}\right) = \mu_t(t)e^{-\tau(t)} \tag{一.4}$$

我们不考虑实际的意义，而是把这个 PDF 函数简化为：

$$F(x) = 1 - e^{-\int_0^x \mu(y)dy} \tag{一.5}$$

$$p(x) = \mu(x)e^{-\int_0^x \mu(y)dy} \tag{一.6}$$

这里的 x 叫做自由路径，即光前进距离 x 才会发生碰撞。当 x 大于 x_{max}（设定的最大距离），这说明光子一直没有发生碰撞。现在我们希望产生一系列的样本 x，这些 x 需要满足上述概率密度分布。

1 1 估计穿透率的直观解释

假如我们想估计 $x-y$ 之间的穿透率，可以采样估计方法：从 x 开始构建增量路径，根据概率判断是否被散射或吸收，如果散射被吸收则终止；如果到达 y 时（以及采样中越过了 y）没有被散射和吸收，那么就说明自由穿越。用自由穿越的数量去比上全部的路径数量，就得到了穿透率。

上面最有意义的转换就是将 $T(t)$ 转为了 $F(t)$，这样就可以符合累积概率密度 CDF 了，从 x 到沿着 y 的方向上，CDF 不断增长，但直到无穷远处才会累积到 1。由于 $x-y$ 是有限长度的，因此在 $x-y$ 中 CDF 永远不会积分到 1。我们生成的分布（采样自由路径长度）很可能会有些地方超过 y 点，但超过的部分就不重要了，因为我们只需要知道当前这次采样中是否自由路径采样时能通过这段介质即可。而且，至少我们采样的路径长度（该长度是被随机吸收时路过的距离，很可能路径不会只前进一次）在 $x-y$ 段中的任何一点上分布都是符合 $F(t)$ 的（这也是我们要证明的内容）。

二 实现方法

我们先尝试“反函数法”生成符合某概率密度的方式：

$$F(x) = 1 - e^{-\int_0^x \mu(y)dy} = 1 - e^{-\tau(x)} \tag{二.1}$$

$$\ln\left(e^{-\int_0^x \mu(y)dy}\right) = \ln\left(1 - F(x)\right) \tag{二.2}$$

$$\int_0^x \mu(y)dy = -\ln\left(1 - F(x)\right) \tag{二.3}$$

$$\tau(x) = -\ln\left(1 - F(x)\right) \tag{二.4}$$

令 $F(x) = \xi \in rand(0,1)$，代入，就可以得到 τ 的关于 $F(x)$ 的概率密度分布:

$$\tau(x) = -\ln\left(1 - \xi\right) \tag{二.5}$$

τ 被称为光学厚度，我们只需要让采样中某一段积累的光学厚度等于 τ，就能得到符合 $p(x)$ 的概率密度分布 [3]。也就是说可以通过 raymarch 的方法，当前一段累加的 $\tau((t-1)\Delta) \leq \tau$，且后一段 $\tau(t\Delta) > \tau$，我们就认为 t 是近似解。当然这种方式除非 $\Delta \to 0$，否则偏差会很大。

现在我们考虑无偏方法，我们先介绍论文 [1] 的第一种方法。首先根据下面的概率密度分布来生成样本 η:

$$F(Y) = \int_0^Y e^{-v}dv, \quad 0 \leq Y \tag{二.6}$$

我曾经认为论文 [1] 中上述公式写错了，应该是这样：

$$F(Y) = \int_0^Y ve^{-v}dv, \quad 0 \leq Y \tag{二.7}$$

没有这个 v，概率密度积分都不能保证为 1 啊。但是仔细一看才发现没有错，其实就是应该这样，设 $v = \int_0^\theta \mu(x)dx$，则 $dv = \mu(x)dx$，故论文原式成立。

然后通过如下方式生成样本 θ:

$$\eta = \phi(\theta) = \int_0^\theta \mu(x)dx \tag{二.8}$$

$$\theta = \phi^{-1}(\eta) \tag{二.9}$$

这就是反函数法得到随机样本的过程。

在图形学中，实现方法其实就是 woodcock 追踪，用来生成符合上述概率密度的自由路径长度 x：

t = 0;

do

  η = random(0,1);

  t = t - $\frac{log(1-\eta)}{\overline{\mu}}$;

  if *($t \geq d$)* **then**

    break;

  end

  ξ = random(0,1);

while $\xi > \frac{\mu(o+t*\omega)}{\overline{\mu}}$;

return t;

注意这里选择的 $\overline{\mu}$ 要大于中间遇到的所有 $\mu(o+t*\omega)$。

这里的无偏性主要依赖于两个方面,一是前进距离 $-\frac{log\left(1-rand(0,1)\right)}{\overline{\mu}}$,二是判断是否碰撞的概率 $rand(0,1) > \frac{\mu(o+t*\omega)}{\overline{\mu}}$。

三 无偏性证明

我们设射线从 o 出发，沿着方向 ω 采样。

符号设定

设我们有无限多个独立的随机数 ξ_i，符合下式概率密度分布：

$$P(\xi_i \leq X) = F_\xi(X) = \int_0^X \overline{\mu} e^{-\overline{\mu}x} dx \tag{三.1}$$

设 $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n, ...$ 是 $[0,1]$ 之间的均匀分布。

定义 $\sigma(x) \equiv \frac{\mu(x)}{\overline{\mu}}$，$\alpha(x) = 1 - \sigma(x)$。

令 $\zeta_i = \sum_{j=1}^{i} \xi_j = \zeta_{i-1} + \xi_i$，且 $\zeta_0 = \xi_0 = 0$。

当 $\rho_n \leq \sigma(\zeta_n) = \frac{\mu(\zeta_n)}{\overline{\mu}}$，$n = 1, 2, ..., N$ 时，我们可以认为在一个局部区域光子撞上了粒子，否则光就算是撞上了虚拟粒子 [3]。

让 λ 表示随机变量 ζ_N，我们可以看出，取 $n = N$ 时来得到相应的 λ 值。

生成符合我们需求的概率密度分布的 λ 方式如下：

i=0,ζ_0=0;

do

  i=i+1;

  生成 ξ_i 和 ρ_i;

  $\zeta_i = \zeta_{i-1} + \xi_i$;

while *($\rho_i > \frac{\mu(\zeta_i)}{\overline{\mu}}$)*;

λ=ζ_i;

Algorithm 1: 算法描述

注意这里生成 ξ_i 的计算式就是 $-\frac{log(1-rand(0,1))}{\overline{\mu}}$，所以论文 [1] 中的这个算法描述和我们之前给出的是完全一样的。

现在符号都定义完了，接下来就是论文长达三页的证明了（但其实并不难），我们证明的内容是生成的 λ 符合概率密度分布 $F(X)$。

证明思路

我们设事件 $E_1 = \{\rho_1 \leq \sigma(\zeta_1), \zeta_1 \leq Z\}$，Z 是 λ 范围内任意固定值。

$E_2 = \{\rho_1 > \sigma(\zeta_1), \rho_2 \le \sigma(\zeta_2), \zeta_2 \le Z\}$。
$E_n = \{\rho_1 > \sigma(\zeta_1), \rho_2 > \sigma(\zeta_2), ..., \rho_{n-1} > \sigma(\zeta_{n-1}), \rho_n \le \sigma(\zeta_n), \zeta_n \le Z\}$。
上面的公式可以理解为，在某个距离 Z 以内，前进 n 次距离以后才发生碰撞的概率。因此：

$$P[\lambda \le Z] = F_\lambda(Z) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n) \tag{三.2}$$

代入前面关于 ξ_i 与 ζ_i 之间的关系，可以得到：

$$P[E_1] = P\Big[\rho_1 \le \sigma(\xi_1), \xi_1 \le Z\Big] \tag{三.3}$$

$$P[E_n] = P\Big[\rho_1 > \sigma(\xi_1), ..., \rho_{n-1} > \sigma\{\sum_{i=1}^{n-1}\xi_i\}, \rho_n \le \sigma\{\sum_{i=1}^{n}\xi_i\}, \xi_n \le Z - \sum_{i=1}^{n-1}\xi_i\Big] \tag{三.4}$$

我们可以用边缘概率密度来解，给定 $\xi_1 = x_1$：

$$f(x_1) = P\big[\rho_1 \le \sigma(\xi_1) \big| \xi_1 = x_1\big] = \sigma(x_1) \tag{三.5}$$

$$P[E_1] = \int_0^Z P\big[\rho_1 \le \sigma(\xi_1) \big| \xi_1 = x_1\big] dF_\xi(x_1) = \int_0^Z \sigma(x_1)\overline{\mu} e^{-\overline{\mu} x_1} dx_1 \tag{三.6}$$

我个人感觉 $P[E_1]$ 应该是这么得到的：

$$P(\xi_i \le X) = F_\xi(X) = \int_0^X f(x)dx \tag{三.7}$$

$$P[E_1] = P\Big[\rho_1 \le \sigma(\xi_1), \xi_1 \le Z\Big] \tag{三.8}$$

$$P[E_1] = \int_0^Z P\big[\rho_1 \le \sigma(\xi_1) \big| \xi_1 = x_1\big] f(x_1)dx_1 \Longrightarrow \tag{三.9}$$

$$P[E_1] = \int_0^Z P\big[\rho_1 \le \sigma(\xi_1) \big| \xi_1 = x_1\big] dF_\xi(x_1) \tag{三.10}$$

同理，可以得到 $P(E_2)$：

$$P[E_2] = \int_0^Z \int_0^{Z-x_1} P\big[\rho_1 > \sigma(\xi_1), \rho_2 \le \sigma\{\sum_{i=1}^{2}\xi_i\} \big| \xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2\big] dF_{\xi_1,\xi_2}(x_1, x_2) \tag{三.11}$$

这里的 $Z - x_1$ 是因为当 $\xi_1 = x_1$ 时，要保证 $x_1 + x_2 \le Z$，因此 x_2 的变化范围就是 $[0, Z - x_1]$。尽管从实际物理意义上来说 x_2 的变化区域应该是 $[x_1, Z]$，但不明白为什么论文中的积分区域是 $[0, Z - x_1]$，可能是因为反正是 n 个独立同分布的样本，谁在前谁在后都一样吧。

我们可以得到 $P(E_n)$：

$$\begin{aligned} P[E_n] = &\int_0^Z \int_0^{Z-x_1} ... \int_0^{Z-\sum_{i=1}^{n-1} x_i} \\ &P\big[\rho_1 > \sigma(\xi_1), ..., \rho_{n-1} > \sigma\{\sum_{i=1}^{n-1}\xi_i\}, \rho_n \le \sigma\{\sum_{i=1}^{n}\xi_i\} \big| \xi_1 = x_1, ..., \xi_n = x_n\big] \\ &dF_{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n}(x_1, x_2, ..., x_n) \end{aligned} \tag{三.12}$$

后面的 dF 表示变量的联合概率密度分布。
由于 $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n$ 是相互独立的，所以上式中，被积分项可以表示为：

$$\begin{aligned} &P\big[\rho_1 > \sigma(\xi_1), ..., \rho_{n-1} > \sigma\{\sum_{i=1}^{n-1}\xi_i\}, \rho_n \le \sigma\{\sum_{i=1}^{n}\xi_i\}, \xi_n \le Z - \sum_{i=1}^{n-1}\xi_i | \xi_1 = x_1, ..., \xi_n = x_n\big] \\ =&P\Big[\rho_1 > \sigma(\xi_1) | \xi_1 = x_1\Big] \times \cdots \times P\Big[\rho_{n-1} > \sigma\big(\sum_{i=1}^{n-1}\xi_i\big) | \xi_1 = x_1, ..., \xi_{n-1} = x_{n-1}\Big] \\ &\times P\Big[\rho_n \le \sigma\big(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\big) | \xi_1 = x_1, ..., \xi_n = x_n\Big] \end{aligned} \tag{三.13}$$

由于 $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ 是独立同分布的，所以：

$$dF_{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = dF_{\xi_1}(x_1)...dF_{\xi_n}(x_n) = dF_\xi(x_1)...dF_\xi(x_n) \tag{三.14}$$

另外可知：

$$P\Big[\rho_n > \sigma\{\sum_{i=1}^{n}\xi_i\}\big|\xi_1 = x_1, ..., \xi_n = x_n\Big] = 1 - \sigma\{\sum_{i=1}^{n} x_i\} \tag{三.15}$$

因此，把它们代入到 $P(E_n)$ 中，就可以得到：

$$\begin{aligned}P[E_n] = &\int_0^Z \int_0^{Z-x_1} ... \int_0^{Z-\sum_{i=1}^{n-1} x_i} \\ &P\Big[\rho_1 > \sigma(\xi_1)|\xi_1 = x_1\Big] \times \cdots \times P\Big[\rho_{n-1} > \sigma\big(\sum_{i=1}^{n-1}\xi_i\big)|\xi_1 = x_1, ..., \xi_{n-1} = x_{n-1}\Big] \\ &\times P\Big[\rho_n \le \sigma\big(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\big)|\xi_1 = x_1, ..., \xi_n = x_n\Big] dF_\xi(x_1)...dF_\xi(x_n)\end{aligned} \tag{三.16}$$

$$\begin{aligned}P[E_n] = &\int_0^Z \int_0^{Z-x_1} ... \int_0^{Z-\sum_{i=1}^{n-1} x_i} \\ &\Big[1 - \sigma(x_1)\Big] \cdot \cdot \cdot \Big[1 - \sigma(\sum_{i=1}^{n-1} x_i)\Big] \Big[\sigma(\sum_{i=1}^{n} x_i)\Big] \overline{\mu} e^{-\overline{\mu}x_1} ... \overline{\mu} e^{-\overline{\mu}x_1} dx_1...dx_n\end{aligned} \tag{三.17}$$

引入 $z_i = (\sum_{j=1}^{i} x_j)$ 和 $\alpha(\cdot) = 1 - \sigma(\cdot)$：

$$P[E_1] = \int_0^Z \sigma(z_1)\overline{\mu} e^{-\overline{\mu}z_1} dz_1 \tag{三.18}$$

$$\begin{aligned}P[E_n] &= \int_0^Z dz_n \overline{\mu}^n \sigma(z_n) e^{-\overline{\mu}z_n} \int_0^{z_n} dz_{n-1}\alpha(z_{n-1}) \int_0^{z_{n-1}} dz_{n-2}\alpha(z_{n-2}) \cdot \cdot \cdot \int_0^{z_2} dz_1\alpha(z_1) \\ &= \int_0^Z dz_1 \sigma(z_1) \overline{\mu}^n e^{-\overline{\mu}z_1} \int_0^{z_1} dz_2\alpha(z_2) \int_0^{z_2} \cdot \cdot \cdot \int_0^{z_{n-1}} dz_n\alpha(z_n)\end{aligned} \tag{三.19}$$

注意上式中，$e^{-\overline{\mu}z_n} = e^{-\overline{\mu}x_1} \cdot \cdot \cdot e^{-\overline{\mu}x_n}$。

剩下的内容就是数学归纳法了，因为没有什么关于实际意义的内容，所以不再赘述。另外，在 [4] 的补充材料里，还有更一般的分析讨论，大家有兴趣可以参考一下。

参考文献

[1] W. A. Coleman . Mathematical Verification of a Certain Monte Carlo Sampling Technique and Applications of the Technique to Radiation Transport Problems[J]. Nuclear Science and Engineering. 1968.

[2] J Novák, Georgiev I , Hanika J , et al. Monte Carlo Methods for Volumetric Light Transport Simulation[J]. Computer Graphics Forum, 2018.

[3] L Szirmay-Kalos, B Tóth, Magdics M . Free Path Sampling in High Resolution Inhomogeneous Participating Media[J]. Computer Graphics Forum, 2011.

[4] Novak J , Selle A , Jarosz W . Residual ratio tracking for estimating attenuation in participating media[J]. ACM Transactions on Graphics, 2014, 33(6CD):179.1-179.11.