Unbiased Global Illumination with Participating Media

Dezeming Family

2022 年 12 月 30 日

正常字体：表示论文的基本内容解释。

粗体：表示需要特别注意的内容。

红色字体：表示容易理解错误或者混淆的内容。

蓝色字体：表示额外增加的一些注释。

绿色字体：表示额外举的一些例子。

目录

abstract

我们展示了渲染参与介质的全局光照技术，我们不使用 ray marching，而是使用 Monte Carlo(MC) 方法来实现光传输和穿透率 (transmittance) 的估计。这是对于参与介质中的光传输的无偏的估计。

一 Introduction

大多数算法难以正确估计光与烟、雾或灰尘等介质交互所造成的影响。双向方法 (BDPT) 和 Metropolis 光传输 (MLT) 是非常精妙复杂的无偏方案，在 [1, 2] 中被引入到渲染参与介质。然而，它们由于使用了 Ray Marching[3] 技术，因此它们并不是无偏的。

二 Light Transport with Participating Media

设一个体表示为 $\mathcal{V}$，则它的表面就表示为 $\partial\mathcal{V}$，由于体是一个开区间，所以 $\mathcal{V} \cap \partial\mathcal{V} = \varnothing$。

两个公式表示如下：

$$L(x,\omega) = L_{e,\partial\mathcal{V}}(x,\omega) + \int_{\mathcal{S}^2} f_s(\omega,x,\omega')L(x,\omega')|\cos\theta_x|d\sigma(\omega'). \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\omega}L(x,\omega) =& L_{e,\mathcal{V}}(x,\omega) - \sigma_t(x)L(x,\omega)\\ &+ \sigma_s(x)\int_{\mathcal{S}^2} f_p(\omega,x,\omega')L(x,\omega')d\sigma(\omega'),\end{aligned} \tag{2}$$

根据 [4] 推导，得到非常全面的光传输公式：

$$\begin{aligned}L(y \to z) = & L_e(y \to z)\\ &+ \int_{\mathbb{R}^3} L(x \to y)f(x \to y \to z)G(x \leftrightarrow y)V(x \leftrightarrow y)d\lambda(x),\end{aligned} \tag{5}$$

$$f(x \to y \to z) := \begin{cases} f_r(\overrightarrow{yz}, y, \overrightarrow{xy}) & \text{if } y \in \partial\mathcal{V} \\ \sigma_s(y)f_p(\overrightarrow{yz}, y, \overrightarrow{xy}) & \text{if } y \in \mathcal{V} \end{cases} \tag{6}$$

$$L_e(x \to y) := \begin{cases} L_{e,\partial\mathcal{V}}(x, \overrightarrow{xy}) & \text{if } y \in \partial\mathcal{V} \\ L_{e,\mathcal{V}}(x, \overrightarrow{xy}) & \text{if } y \in \mathcal{V} \end{cases} \tag{7}$$

$$G(x \leftrightarrow y) := \begin{cases} \frac{|\cos\theta_x||\cos\theta_y|}{\|y-x\|^2} & \text{if } x,y \in \partial\mathcal{V} \\ \frac{|\cos\theta_x|}{\|y-x\|^2} & \text{if } x \in \partial\mathcal{V}, y \in \mathcal{V} \\ \frac{|\cos\theta_y|}{\|y-x\|^2} & \text{if } y \in \partial\mathcal{V}, x \in \mathcal{V} \\ \frac{1}{\|y-x\|^2} & \text{if } x,y \in \mathcal{V} \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}V(x \leftrightarrow y) :&= V'(x \leftrightarrow y)\tau(x \leftrightarrow y)\\ &= V'(x \leftrightarrow y)e^{-\int_0^{\|y-x\|}\sigma_t(x+t\overrightarrow{xy})dt}\\ V'(x \leftrightarrow y) &= \begin{cases} 1 & \text{if } \|y-x\| \le \|h(x,\overrightarrow{xy}) - x\| \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}\end{aligned} \tag{9}$$

三 Unbiased Techniques for Transport Path Sampling

对于体渲染来说，采样散射分为两步，一是采样距离（采样下一次的交点），二是采样散射方向。

对于 Homogeneous 介质 $\sigma_t \equiv \sigma_t$，穿透率正比于指数分布：

$$p(t) = \sigma_t e^{-\sigma_t t}$$

根据论文中的公式 (11) 即可对 t 进行采样。采样到的 t 的含义可以这么理解：假如我们有非常多（假设为 N）束光粒子穿过同一段 volume，那么就会采样到 N 个 t，这 N 个 t 的分布就会符合 $p(t)$（注意对应 $p(t)$ 的累积概率密度函数是 $1 - T(t)$，其中 T 表示穿透率，为什么要用 1 减，可以参考《Woodcock-tracking 的无偏性证明》）。

Homogeneous 介质采样距离 t 可以一次完成（一步就采样到 t 值），但是对于 Heterogeneous 介质就没那么容易了，因为你不知道一段体中的介质分布，随机方法需要采样多步（根据条件循环），可见论文原文中的 Algorithm 1：

```
float sampleDistance(Point x_0, Direction ω)
{
    //sample with the maximum extinction σ_t
    float t = −log(rand()) / σ_t;

    while (σ_t(x_0+tω)/σ_t < rand())
        t −= log(rand()) / σ_t;

    return t;
}
```

其实 σ_t 并不一定是介质中的最大的 $\sigma_t(x)$ 值，但是如果它比最大的 $\sigma_t(x)$ 大太多，就会导致效率下降（每次 t 前进的距离太小，而且在 while 判断中也更不容易发生散射事件，因此使得效率下降）。这里的每个 rand() 都是会产生新的随机数。

3 1 Line Integral along a Ray

在许多算法中，透射率的显式估计非常重要。此外，在渲染包含参与媒体的场景时，沿主光线 split 通常是有益的。因此，我们在算法 1 的语境文中推广了沿射线的一维积分，以获得通用的无偏解。

假设我们需要估计的是一个被穿透率加权的积分项 C，积分从 x_{av} 开始，一直积分到 x：

$$C = c_{\partial \mathcal{V}}\left(x_{\partial \mathcal{V}}\right)\tau(x \leftrightarrow x_{\partial \mathcal{V}}) + \int_0^{\|x_{\partial \mathcal{V}} - x\|} c_{\mathcal{V}}(x - t\omega)\tau(x \leftrightarrow x - t\omega)dt, \qquad (13)$$

其中 c_{av} 是函数在表面上的贡献，c_v 是函数在体中的贡献，最简单的情况是 $c_{av} \equiv 1$ 且 $c_v \equiv 0$，此时我们估计的结果就是穿透率本身。

当不满足最简单的情况时，用 Algorithm 1 来估计贡献时，可以通过变换偏移一个随机偏移的等距样本来提高收敛性，该过程见 Algorithm 2。

我简单解释一下这个算法的原理。该算法首先在 $[0, p_v)$ 上产生一堆等距离的点（这些等距离的点还要进行随机偏置），即 Δ。

一开始时的贡献 C 是 $e^{-\sigma_t t_{av}} L(x_{av}, \omega)$，这里的 $L(x_{av}, \omega)$ 应该是 c_{av}。

用 Δ（该值大于 0 小于 1）作为 n 个随机步长 $t_1, ..., t_n$ 的初始的随机数（相当于估计 n 次）。为什么这个方法是无偏的，论文里也没有给出证明。

3 2 Handling Multiple Wavelengths

彩色介质的处理一直比较困难，这里的说法并不明晰，所以不再介绍。

四 Applications

这里的技术其实跟应用参与介质其实并没有很大关系，只是在应用场景中可以融入参与介质。而且由于本文年代较久，所以不再赘述。

参考文献

[1] E. Lafortune and Y. Willems. Rendering Participating Media with Bidirectional Path Tracing. Rendering Techniques ’ 96 (Proc. 7th Eurographics Workshop on Rendering), pages 91–100, 1996.

[2] M. Pauly, T. Kollig, and A. Keller. Metropolis Light Transport for Participating Media. In B. P´eroche and H. Rushmeier, editors, Rendering Techniques 2000 (Proc. 11th Eurographics Workshop on Rendering), pages 11–22. Springer, 2000.

[3] K. Perlin and E. Hoffert. Hypertexture. In SIGGRAPH ’89: Proceedings of the 16th annual conference on Computer graphics and interactive techniques, pages 253–262, 1989.

[4] T. Kollig. Efficient Sampling and Robust Algorithms for Photorealistic Image Synthesis. PhD thesis, University of Kaiserslautern, Germany, 2004.